

1. Mengenlehre

1.1. Menge

Eine Menge fasst mathematische Objekte zusammen. Eine Menge ist nicht geordnet und jedes Element ist maximal einmal enthalten.

Bsp.:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{7, \frac{5}{2}, \pi\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \% 2 = 0\} \quad (\text{die Menge der geraden Zahlen})$$

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 3 < x \leq 5\} \quad (\text{die Menge aller reellen Zahlen, welche größer als 3 und kleiner gleich 5 sind})$$

1.2. Elemente einer Menge

Ist ein mathematisches Objekt Teil einer Menge so wird dieses "Element" der Menge genannt.

$$x \in M \quad (x \text{ ist Element von } M)$$

$$x \notin M \quad (x \text{ ist nicht Element von } M)$$

Bsp.:

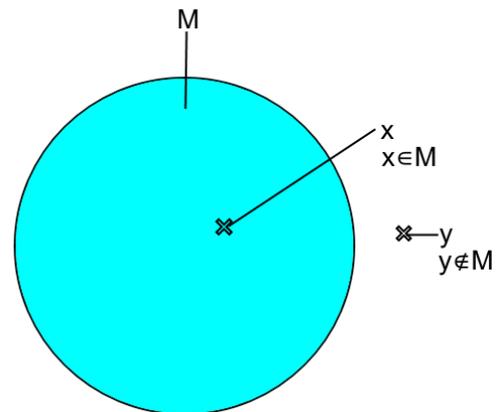
$$5 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$10 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\{1, 2, 3\} \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\{1, 2, 3\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}\}$$

$$5 \notin \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}\}$$



Eine Menge ohne Elemente wird leere Menge genannt.

$$\emptyset = \{\}$$

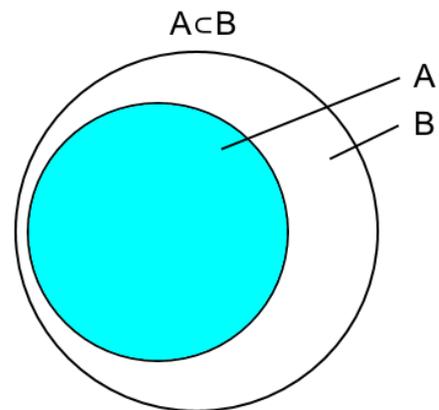
1.3. Teilmenge

Eine Menge A ist eine Teilmenge, einer anderen Menge B, wenn A nur Elemente enthält, die auch in B enthalten sind. Beinhaltet eine Teilmenge weniger Elemente, so nennt man sie echte Teilmenge.

$A \subseteq B$ (Teilmenge)
 $A \subset B$ (echte Teilmenge)

Bsp.:

$A = \{1, 2\}$
 $B = \{1, 2, 3\}$
 $A \subset B$
 $A \subseteq B$



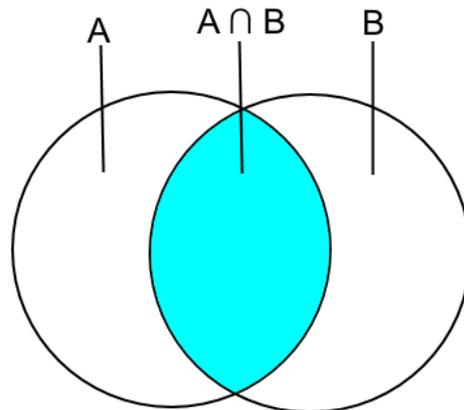
1.4. Schnittmenge

Die Schnittmenge ist das Ergebnis einer Relation von 2 Mengen. Sie enthält die Elemente, welche in beiden Mengen vorhanden sind.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Bsp.:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $B = \{3, 4, 5, 6\}$
 $C = \{1, 2, \{3, 4\}\}$
 $A \cap B = \{3, 4\}$
 $A \cap C = \{1, 2\}$
 $C \cap B = \{\}$



1.5. Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge ist das Ergebnis einer Relation von 2 Mengen. Sie enthält die Elemente, welche wenigstens in einer der beiden Mengen enthalten ist.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Bsp.:

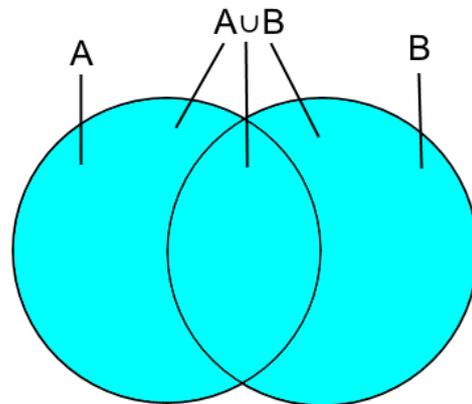
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{1, 2, \{3, 4\}\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, \{3, 4\}\}$$



1.6. Differenzmenge

Die Differenzmenge ist das Ergebnis einer Relation von 2 Mengen. Sie enthält die Elemente, welche in der 1. Menge und dabei nicht in der 2. Menge enthalten sind.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge \overline{x \in B}\}$$

Bsp.:

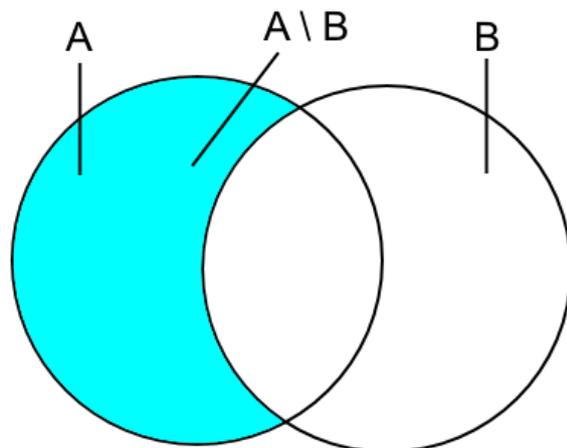
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{1, 2, \{3, 4\}\}$$

$$A \setminus B = \{1, 2\}$$

$$A \setminus C = \{3, 4\}$$



1.7. Kartesische Produkt (Produktmenge)

Die Produktmenge ist das Ergebnis einer Relation von 2 Mengen. Ihre Elemente sind Tupel. Diese sind geordnete Paare, deren erstes Element aus der 1. Menge und das zweite Element aus der 2. Menge stammt.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Bsp.:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{3, 4\}$$

$$C = \{1, \{3, 4\}\}$$

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$A \times C = \{(1, 1), (1, \{3, 4\}), (2, 1), (2, \{3, 4\}), (3, 1), (3, \{3, 4\})\}$$

1.8. Potenzmenge

Die Potenzmenge enthält alle Teilmengen einer Menge.

$$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

Bsp.:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$P(A) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

1.9. Kardinalität (Mächtigkeit)

Die Mächtigkeit einer Menge ist eine natürliche Zahl, welche die Anzahl der Elemente der Menge widerspiegelt.

$$|A| = x \quad x \in \mathbb{N}$$

Bsp.:

$$A = \{3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 2, 3, (4, 5), \{6, 7, 8\}\}$$

$$|A| = 3$$

$$|B| = 5$$

2. Intervalle

2.1. Intervall

Ein Intervall ist eine stetige Menge von reellen Zahlen. Es werden dabei nur die Intervallgrenzen angegeben, alle Werte zwischen der unteren und oberen Grenze sind in der Menge enthalten.

Die Grenzen können dabei in der Menge enthalten sein, es geht aus der Notation hervor, ob dies der Fall ist. Ist die untere Grenze enthalten, so ist sie gleichzeitig das Minimum. Ist die obere Grenze enthalten, stellt sie das Maximum der Menge dar.

2.2. Abgeschlossene Intervalle

Bei einem abgeschlossenen Intervall sind die Grenzen in der Menge enthalten.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Bsp.:

$$[1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

2.3. Offene Intervalle

Bei einem offenen Intervall sind die Grenzen nicht in der Menge enthalten.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Bsp.:

$$(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$$

2.4. Halboffene Intervalle

Bei einem halboffenen Intervall ist eine Grenze abgeschlossen, während die andere offen ist.

rechtsoffene Intervall: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

links offene Intervall: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Bsp.:

$$[1, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$$

$$(-5, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 5\}$$

2.5. Unbeschränkte Intervalle

Wenn ein Intervall nicht über eine untere und/oder obere Grenze verfügt, so nennt man es unbeschränktes Intervall. Dies wird gekennzeichnet, indem die Grenze den Wert $-\infty$ erhält.

$$(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Bsp.:

$$(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$(-\infty, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$$

$$(-\infty, -3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$$

$$(-5, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x\}$$

$$[7, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leq x\}$$