1. Gleichungen

Eine Gleichung ist die Aussage über die Gleichheit zweier Terme:

$T_1 = T_2$

Ist in ein wenigstens einem der Terme mindestens eine Variable kann die Gleichheit einer Gleichung in Abhängigkeit der Variablen untersucht werden. Die Menge aller Variablenbelegungen die eine Gleichung lösen werden Lösungsmenge genannt.

Bsp.:

$5 = x - 3$	$x = 8$	$L = \{8\}$
$x^2 = 9$	$x_1 = 3, x_2 = -3$	$L = \{3, -3\}$

Die Umformung von Termen hat in der Regel keinen Einfluss auf Gleichungen.

Als Äquivalenzumformung bezeichnet man eine Veränderung beider Terme einer Gleichung, welche deren Wahrheitsgehalt und Lösungsmenge nicht verändert. Im Bereich der reellen Zahlen sind fast alle Umformungen Äquivalenzumformungen.

Bsp.:

$x + 2 = 7$	$L = \{5\}$
$x + 2 - 2 = 7 - 2$	$L = \{5\}$
$(x + 2) * 3 = 7 * 3$	$L = \{5\}$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{4}{7} = \frac{3}{2} * \frac{7}{7} + \frac{4}{7} * \frac{2}{2} = \frac{21}{14} + \frac{8}{14} = \frac{29}{14}$$

$$0 = x^3 + 2x^2 + 2x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x + 1)^3 - 1$$

Bsp. Ausnahmen:

Multiplikation mit 0:

$x = 5$	$L = \{5\}$
$x * 0 = 5 * 0$	$L = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

Division durch 0:

$x = 5$	$L = \{5\}$
$x \,/\, 0 = 5 \,/\, 0$	Division durch 0 nicht möglich

Quadrieren:

$x = 5$	$L = \{5\}$
$x^2 = 25$	$L = \{5, -5\}$

2. Ungleichungen

Eine Ungleichung nimmt einen Größenvergleich von zwei Termen vor (größer, kleiner, größer gleich, kleiner gleich, ungleich). Sind in mindestens einem der Terme Variablen enthalten wird das Verhältnis in Abhängig der Variablen untersucht.

Bsp.:

$1 < 2$

$3 > 2$

$4{,}8 \leq 5$

$x \geq 7 \qquad L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

Wie bei Gleichungen haben Termumformungen meist keinen Einfluss auf Lösungsmenge oder Wahrheitsgehalt der Aussage.

Die Äquivalenzumformungen verhalten sich bei Ungleichungen ähnlich wie bei Gleichungen, mit der Ergänzung, dass die Multiplikation oder Division der Terme mit einer negativen Zahl den Vergleichsoperator drehen.

Bsp.:

$x < 5 \qquad L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

$x - 7 > 5 \qquad L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 12\}$

$x > 5 + 7 \qquad L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 12\}$

$x * (-1) < 12 * (-1) \qquad L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 12\}$

Bsp. Ausnahmen:

Multiplikation mit 0:

$x < 5 \qquad L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

$x * 0 < 5 * 0 \qquad L = \{\,\}$

Division durch 0:

$x < 5 \qquad L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

$x \,/\, 0 = 5 \,/\, 0$ Division durch 0 nicht möglich

Quadrieren:

$x < 5 \qquad L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

$x^2 = 25 \qquad L = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5\}$

3. Gleichungssysteme

Mehrere Gleichungen, die von denselben Variablen abhängig sind, nennt man Gleichungssystem.

$a_{11}x_1 \pm a_{12}x_2 \pm \dots \pm a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 \pm a_{22}x_2 \pm \dots \pm a_{2n}x_n = b_2$
$\dots$
$a_{m1}x_1 \pm a_{m2}x_2 \pm \dots \pm a_{mn}x_n = b_m$

Eine Möglichkeit um Gleichungssysteme zu lösen, ist systematisch Variablen durch gezielte Addition und Subtraktion zu eliminieren, bis lediglich noch eine übrig ist. Danach wird schrittweise eingesetzt, bis alle Variablen bekannt sind.

Bsp.:

1.	$3a + 2b - c = 1$	
2.	$2a - 2b + 4c = -2$	
3.	$-a + 0{,}5b - c = 0$	
4.	$5a + 3c = -1$	$(1. + 2.)$
5.	$7a + 3c = 1$	$(1. - 4 * 3.)$
6.	$-2a = -2$	$(4. - 5.)$
	$\underline{a = 1}$	
a in 4.	$5 + 3c = -1$	
	$3c = -6$	
	$\underline{c = -2}$	
a, c in 1.	$3 + 2b + 2 = 1$	
	$2b = -4$	
	$\underline{b = -2}$	