3. Schwerpunkt: Gleichungen und Ungleichungen für eine Variable, Rechnen mit Beträgen

0.3.1.T $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=1$

0.3.2.T $\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x-4}=-1$

0.3.3.T $x+7>3(x-2)$

0.3.4.T $\dfrac{5}{x-4}\leq x$

0.3.5.T $|x|+|2x|+|3x|=12$

0.3.6.T $|x+2|+|x+3|=5x$

0.3.7.T $|x|+2x<3$

0.3.8.T $|x|<x+1+|x-2|$

0.3.9.T $x^2+3\cdot|x|-4=0$

0.3.10.T a) Skizzieren Sie die Funktion $y=f(x)=|x-1|+|2-x|-3$
b) Bestimmen Sie die Nullstellen
c) An welchen Werten x gilt $y=f(x)=-2$?

Lösung:

zu 0.3.1.T

-nicht alle Wurzeln auf einer Seite stehen lassen:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2x+1} &= 1+\sqrt{x} && \Big|\,(\ldots)^2 \\
2x+1 &= 1+2\sqrt{x}+x && \big|\,-1-x \\
x &= 2\sqrt{x} && \Big|\,(\ldots)^2 \\
x^2 &= 4x && \big|\,-4x \\
x(x-4) &= 0
\end{aligned}
$$

$x_1=0$ Probe: $\sqrt{1}-0=1$ w.A.

$x_2=4$ Probe: $\sqrt{9}-\sqrt{4}=1$ w.A.

$L=\{0;4\}$

zu 0.3.2.T

$$\sqrt{2x+5} = \sqrt{4x-4} - 1 \qquad \left|\, (\ldots)^2\right.$$
$$2x+5 = 4x-4-2\sqrt{4x-4}+1 \qquad \left|\, -4x+4-1\right.$$
$$-2x+8 = -2\sqrt{4x-4} \qquad \left|\, :2\right.$$
$$4-x = -\sqrt{4x-4} \qquad \left|\, (\ldots)^2\right.$$
$$16-8x+x^2 = 4x-4 \qquad \left|\, +4-4x\right.$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$
$$x_{1/2} = 6 \pm \sqrt{36-20} = 6 \pm \sqrt{16} = 6 \pm 4$$

$x_1 = 10$ Probe: $\sqrt{25} - \sqrt{36} = -1$ w.A.

$x_2 = 2$ Probe: $\sqrt{9} - \sqrt{4} = -1$ f.A.

$$L = \{10\}$$

zu 0.3.3.T

$$x + 7 > 3(x-2)$$
$$x + 7 > 3x - 6 \qquad \left|\, -x+6\right.$$
$$13 > 2x \qquad \left|\, :2\right.$$
$$x < 6{,}5$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6{,}5\}$$

zu 0.3.4.T

-Achtung: Multiplikation mit negativem Faktor dreht das Relationszeichen um

$$\frac{5}{x-4} \le x \quad \left|\cdot(x-4)\right.$$

1.Fall: $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$

$$5 \le x(x-4)$$
$$5 \le x^2-4x \left|-5\right.$$
$$0 \le x^2-4x-5$$

bzw. $x^2-4x-5 \ge 0$

das ist eine nach oben geöffnete Parabel

Nullstellen: $x^2-4x-5=0$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$$

$x_1 = 5 \qquad x_2 = -1 \rightarrow$ entfällt, da $x>4$

$\rightarrow$ Parabel für $x \ge 5$ oberhalb der $x-$Achse

$$L_1 = [5;+\infty)$$

2.Fall: $x-4<0 \Leftrightarrow x<4$

$\rightarrow$ Multiplikation mit $x-4$ Vorzeichenumkehr

$$5 \ge x(x-4)$$

die selben Schritte liefern:

$$x^2-4x-5 \le 0$$

Nullstellen: für $x \in [x_2;x_1]$ ist Parabel unter der bzw. auf $x-$Achse (Nullstelle)

$$L_2 = [-1;4)$$

$$L = L_1 + L_2 = [5;+\infty) \cup [-1;4)$$
$$= [-1;+\infty) \setminus [4;5)$$

zu 0.3.5.T

$$|x| + |2x| + |3x| = 12$$

wegen $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ folgt :

$$|x| + 2|x| + 3|x| = 12$$
$$6|x| = 12$$

$\underline{\text{1.Fall :}}$ $x \geq 0$ $\quad 6x = 12$

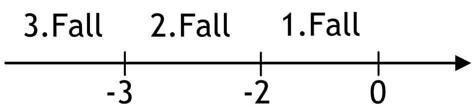
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

$\underline{\text{2.Fall :}}$ $x < 0$ $\quad 6 \cdot (-1) \cdot x = 12$

$$-6x = 12$$
$$\underline{\underline{x = -2}}$$

$$L = \{-2; 2\}$$

zu 0.3.6.T



$$|x+2|+|x+3|=5x$$

<u>1.Fall :</u> $x \geq -2: \quad |x+2|=x+2; \; |x+3|=x+3$

$$\begin{aligned} x+2+x+3 &= 5x \\ 5 &= 3x \\ x &= \frac{5}{3} \qquad L_1=\left\{\frac{5}{3}\right\} \end{aligned}$$

<u>2.Fall :</u> $-3 \leq x < -2: \quad |x+2|=-(x+2); \; |x+3|=x+3$

$$\begin{aligned} -x-2+x+3 &= 5x \\ 1 &= 5x \\ x &= \frac{1}{5} \text{ nicht im Intervall} \qquad L_2=\varnothing \end{aligned}$$

<u>3.Fall :</u> $x < -3: \quad |x+2|=-(x+2); \; |x+3|=-(x+3)$

$$\begin{aligned} -x-2-x-3 &= 5x \\ -2x-5 &= 5x \\ -5 &= 7x \\ x &= -\frac{5}{7} \text{ nicht im Intervall} \qquad L_3=\varnothing \end{aligned}$$

$$L=L_1 \cup L_2 \cup L_3=\left\{\frac{5}{3}\right\}$$

zu 0.3.7.T

$$|x| + 2x < 3$$

1.Fall : $x \ge 0 \qquad x + 2x < 3$

$$3x < 3$$

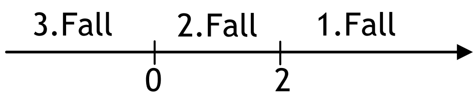
$$x < 1 \qquad L_1 = [0;1)$$

2.Fall : $x < 0 \qquad -x + 2x < 3$

$$x < 3 \qquad L_2 = (-\infty;0)$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty;1)$$

zu 0.3.8.T



$$|x| < x + 1 + |x - 2|$$

1.Fall : $x \ge 2 : \ |x| = x; \ \ |x - 2| = x - 2$

$$x < x + 1 + x - 2$$

$$1 < x \qquad L_1 = \{2\,;\infty\}$$

2.Fall : $0 \le x < 2 : \ |x| = x; \ \ |x - 2| = -(x - 2)$

$$x < x + 1 - (x - 2)$$

$$x < x + 1 - x + 2$$

$$x < 3 \qquad L_2 = [0\,;2)$$

3.Fall : $x < 0 : \ |x| = -x; \ \ |x - 2| = -(x - 2)$

$$-x < x + 1 - (x - 2)$$

$$-x < x + 1 - x + 2$$

$$-x < 3 \qquad |\cdot(-1)$$

$$x > -3 \qquad L_3 = (-3\,;0)$$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (-3\,;\infty)$$

zu 0.3.9.T

$$x^2 + 3 \cdot |x| - 4 = 0$$

$\underline{\text{1.Fall:}}\ x \geq 0 \qquad |x| = x \qquad D_1 = [0;\infty)$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -4 \qquad \text{entfällt, da } x_2 \notin D_1$$

$$L_1 = \{1\}$$

$\underline{\text{2.Fall:}}\ x < 0 \qquad |x| = -x \qquad D_2 = (-\infty;0)$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$
$$x_1 = 4 \qquad \text{entfällt, da } x_1 \notin D_2$$
$$x_2 = -1$$

$$L_2 = \{-1\}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \{-1; 1\}$$

zu 0.3.10.T

$$y = f(x) = |x-1| + |2-x| - 3$$

$\underline{1.\text{Fall}:}\ x \geq 2:\ |x-1| = x-1;\ |2-x| = -(2-x)$

$$y = x-1-2+x-3 = \underline{2x-6}$$

$\underline{2.\text{Fall}:}\ 1 < x < 2:\ |x-1| = x-1;\ |2-x| = 2-x$

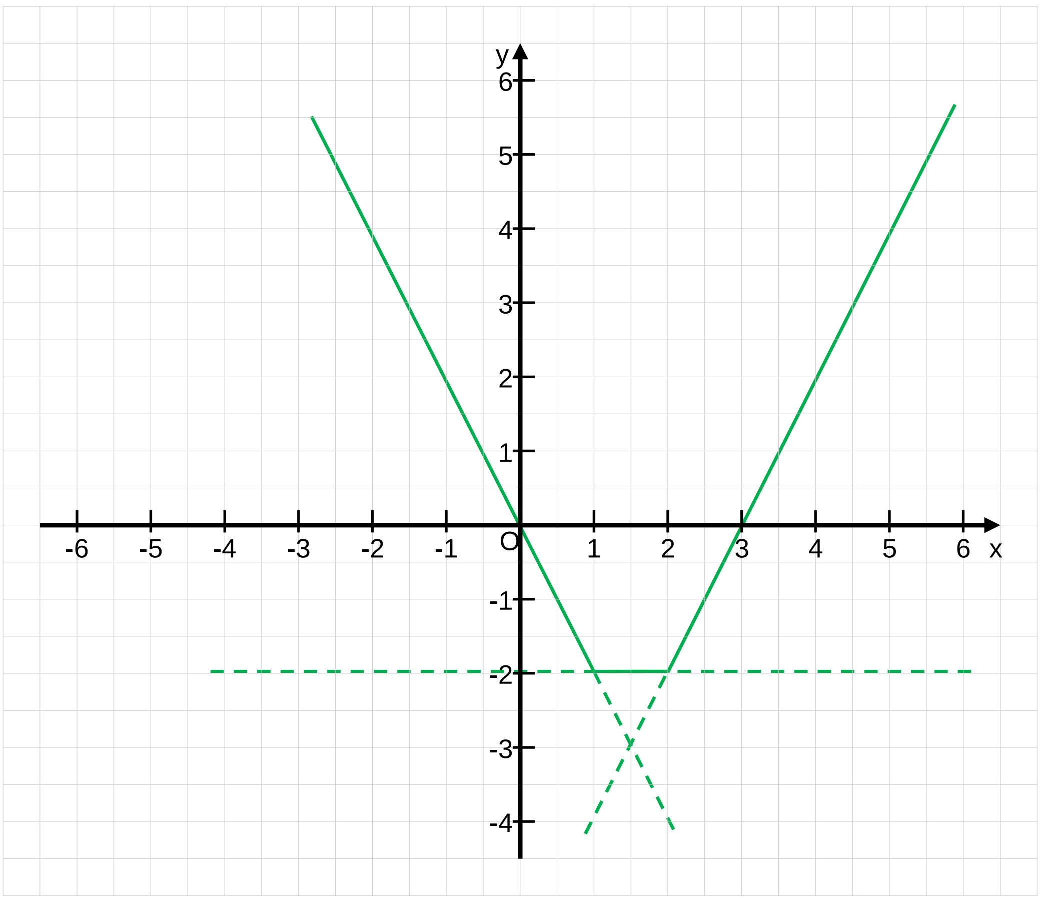
$$y = x-1+2-x-3 = \underline{-2}$$

$\underline{3.\text{Fall}:}\ x \leq 1:\ |x-1| = -(x-1);\ |2-x| = 2-x$

$$y = -x+1+2-x-3 = \underline{-2x}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 2x-6 & \text{für} \quad x \geq 2 \\ -2 & \text{für} \quad 1 < x < 2 \\ -2x & \text{für} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

a)



b)

Nullstellen :

grafisch : $x_1 = 3$; $x_2 = 0$

numerisch :

1.Fall : $2x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = 3$

2.Fall : $-2 = 0 \rightarrow$ keine Lösung

3.Fall : $-2x = 0 \rightarrow x_2 = 0$

$$L = \{0\,;\,3\}$$

c)

$y = -2$

grafisch : $L = [1;2]$

rechnerisch :

1.Fall : $2x - 6 = -2 \rightarrow x_1 = 2$

2.Fall : $-2 = -2 \rightarrow$ alles Lösung : $[1;2]$

3.Fall : $-2x = -2 \rightarrow x_2 = 1$