

1. Schwerpunkt: Matrizenrechnung

1.1 Untersuchen Sie, für welche Werte p die Matrix $C = A \cdot B$ eine inverse Matrix besitzt!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$C = A \cdot B$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 4 + 2p \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 4 + 2p \end{vmatrix} = 8 + 4p - 22 = 4p - 14$$

$$\begin{aligned} D \neq 0 &\rightarrow 4p - 14 \neq 0 \\ &4p \neq 14 \\ &p \neq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Für alle Werte p ungleich $\frac{7}{2}$ besitzt die Matrix eine inverse Matrix

1.2 Man gebe das Gleichungssystem $x + y = a$ (I)
 $x - y = b$ (II)

In Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix A an!

Man löse es mit dem Gauß-Algorithmus nach x und y auf und gebe das Ergebnis ebenfalls in Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix B an!

Zeigen Sie, dass A und B zueinander inverse Matrizen sind!

Für welche Wahl der Konstanten a , b ist das gegebene Gleichungssystem eindeutig lösbar, unlösbar bzw. besitzt unendlich viel Lösungen?

Lösung:

Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

nach den Variablen x und y auflösen:

$$(I) + (II) \quad 2x = a + b$$

$$(I) - (II) \quad 2y = a - b$$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

$$y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix B:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Zeigen, dass A und B zueinander inverse Matrizen sind:

$$B = A^{-1}$$

$$A \cdot B = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich die Einheitsmatrix, somit sind A und B zueinander inverse Matrizen.

Stets eindeutig lösbar für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$

1.3 Gegeben sind die Matrizen A, B, C mit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ p & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ p & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie den Typ der Matrizen A, B, B^T und C !
- Berechnen Sie die Produkte AB und $B^T A^T$!
- Welche Matrix X erfüllt die Gleichung $2A + X = 4C$?

Lösung:

$$\text{a) Typ A} = (3;3) \quad \text{Typ B} = (3;2) \quad \text{Typ B}^T = (2;3) \quad \text{Typ C} = (3;3)$$

$$\text{b) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ p & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p+1 & -3 \\ p^2+7 & 4 \\ p & -5 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 2p+1 & p^2+7 & p \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } 2A + X = 4C$$

$$X = 4C - 2A$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ p & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ p & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 16 & -4 & -8 \\ 4p & 12 & 20 \\ -12 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2p & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -6 \\ 2p & 8 & 14 \\ -14 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1.4. Stellen Sie die nachfolgende Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

nach dem Lösungsvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ um und bestimmen Sie die Werte von a und b mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C \quad | A^{-1} \cdot$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot C$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$I \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$B = A^{-1} \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(M|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 5 \end{matrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -10 & 2 & 0 \\ 15 & -10 & 0 & 5 \end{array} \right) \cdot \begin{matrix} -Z2 \\ \end{matrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 2 & -5 \\ 15 & -10 & 0 & 5 \end{array} \right) : 5$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) + \frac{3}{11} Z1$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & \frac{6}{11} & -\frac{4}{11} \end{array} \right) \begin{matrix} : (-11) \\ : (-2) \end{matrix}$$

$$\left(I \mid M^{-1} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right) \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

1.5 Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem: $2x + 3y = -7$
 $4x - y = 25$

- Schreiben Sie dieses Gleichungssystem in Matrizenform.
- Stellen Sie die Matrixgleichung nach dem Spaltenvektor der gesuchten Variablen um, und bestimmen Sie die Werte von x und y mit Hilfe der inversen Matrix.

(Die inverse Matrix kann mit dem Gauss-Jordan-Verfahren oder auch über Adjunkten erfolgen - in jedem Fall ist ihre Berechnung ausführlich durchzuführen !)

Lösung - mit dem Gauss-Jordan-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C \quad | A^{-1} \cdot$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot C$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$I \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$B = A^{-1} \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (M|I) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) +3Z2 \\
 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) -\frac{2}{7}Z1 \\
 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} :14 \\ :(-1) \end{array}
 \end{aligned}$$

$$(I|M^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{34}{7} \\ -\frac{39}{7} \end{pmatrix}}}$$

Lösung- über Adjunkten:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \frac{A_{11}}{D} = \frac{-1}{-14} = \underline{\underline{\frac{1}{14}}} & \alpha_{21} &= \frac{A_{12}}{D} = \frac{-4}{-14} = \underline{\underline{\frac{2}{7}}} \\
 \alpha_{12} &= \frac{A_{21}}{D} = \frac{-3}{-14} = \underline{\underline{\frac{3}{14}}} & \alpha_{22} &= \frac{A_{22}}{D} = \frac{2}{-14} = \underline{\underline{-\frac{1}{7}}}
 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{34}{7} \\ -\frac{39}{7} \end{pmatrix}}}$$

1.6 Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit der inversen Matrix

$$\begin{aligned}x + 2y &= 1 \\x - 3y + 4z &= 3 \\x + y + z &= 2\end{aligned}$$

Die inverse Matrix ist ausführlich mit dem Gauss-Jordan-Verfahren zu berechnen !

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot B = C \quad | A^{-1} \cdot$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot C$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$I \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$B = A^{-1} \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(M | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -Z3 \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -Z1 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -3Z3 \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +2Z2 \\ \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ :(-1) \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ +Z2 \end{array}$$

$$(I | M^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -8 \\ -3 & -1 & 4 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$