5. Schwerpunkt: Differenzialrechnung, Funktionen

5.1 Berechnen Sie für folgende Funktionen y = f(x) die erste Ableitung y'

a) $y = \sqrt{a + 4x^2}$ b) $y = \dfrac{\ln(x+b)}{x^2 - b^2}$ c) $y = x \cdot \cos(3x - \varphi)$

d) $y \cdot \sin(3x) - xy = x - y$ e) $y = \left(ax^2 - 3\right)\left(bx^2 - 2\right)\left(cx^2 - 1\right)$

Lösung:

a)

$$y = \sqrt{a + 4x^2} = \left(a + 4x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(a + 4x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x = 4x\left(a + 4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \underline{\underline{\frac{4x}{\sqrt{a + 4x^2}}}}$$

b)

$$y = \frac{\ln(x+b)}{x^2 - b^2}$$

$$y' = \frac{\left(x^2 - b^2\right) \cdot \dfrac{1}{(x+b)} - \ln(x+b) \cdot 2x}{\left(x^2 - b^2\right)^2} = \frac{\cancel{(x+b)}\,(x-b) \cdot \dfrac{1}{\cancel{(x+b)}} - \ln(x+b) \cdot 2x}{\left(x^2 - b^2\right)^2}$$

$$y' = \underline{\underline{\frac{(x-b) - 2x \cdot \ln(x+b)}{\left(x^2 - b^2\right)^2}}}$$

c)

$$y = x \cdot \cos(3x - \varphi)$$

$$y' = 1 \cdot \cos(3x - \varphi) - x \cdot \sin(3x - \varphi) \cdot 3$$

$$y' = \underline{\underline{\cos(3x - \varphi) - 3x \cdot \sin(3x - \varphi)}}$$

d)

$$y \cdot \sin(3x) - xy + y = x$$

$$y = \frac{x}{1 - x + \sin(3x)}$$

$$y' = \frac{(1 - x + \sin(3x)) - x(-1 + 3\cos(3x))}{(1 - x + \sin(3x))^2}$$

$$y' = \frac{1 + \sin(3x) - 3x\cos(3x)}{(1 - x + \sin(3x))^2}$$

e)

$$y = (ax^2 - 3)(bx^2 - 2)(cx^2 - 1)$$

$$\text{NR}: \quad y = uvw \qquad y' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$y' = 2x\left[a(bx^2 - 2)(cx^2 - 1) + b(ax^2 - 3)(cx^2 - 1) + c(ax^2 - 3)(bx^2 - 2)\right]$$

5.2 Berechnen Sie die unbestimmten Ausdrücke

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - x}{3x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^2 + 7}{4x^3 + 8}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x} \cdot e^{-x}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \left[(x^2 - 4) \cdot \ln(x - 2)\right]$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(ax) - 1}{\cos(4x) - 1}$

Lösung:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\cos(2x) - 1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 + 7}{4x^3 + 8} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x}{12x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x - 2}{24x} = \frac{6}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

oder auch: $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 + 7}{4x^3 + 8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{4x^3}{x^3} + \frac{8}{x^3}\right)} = \frac{1 - 0 + 0}{4 + 0} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

c) $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x}\cdot e^{-x}\right) = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot e^x}\right) = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

d) $$\lim_{x\to 2} \left[\left(x^2 - 4\right)\cdot \ln(x - 2)\right] = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 2} \left[\frac{\ln(x-2)}{\left(x^2 - 4\right)^{-1}}\right] = \lim_{x\to 2} \left[\frac{(x-2)^{-1}}{-2x\left(x^2 - 4\right)^{-2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2} \left[\frac{\left(x^2 - 4\right)^2}{-2x(x-2)}\right] = \lim_{x\to 2} \left[\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{-2x(x-2)}\right] = \lim_{x\to 2} \left[\frac{(x-2)(x+2)^2}{-2x}\right] = \underline{\underline{0}}$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) - 1}{\cos(4x) - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-a\sin(ax)}{-4\sin(4x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-a^2\cos(ax)}{-16\cos(4x)} = \underline{\underline{\frac{a^2}{16}}}$$

5.3 Eine Funktion sei wie folgt definiert:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0 \\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Welche Art von Unstetigkeit besitzt die Funktion an $x = 0$?
Bestimmen Sie dazu dort die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

Lösung:

linksseitiger Grenzwert : $g_-(0) = 2$

rechtsseitiger Grenzwert : $g_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \dfrac{0}{0}$

$$g_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Da linksseitiger Grenzwert gleich dem rechtsseitigen Grenzwert ist und die Funktion nicht an $x = 0$ definiert ist, handelt es sich um eine Definitionslücke.

5.4 Lösen Sie folgende nichtlineare Gleichung mit dem Newtonschen Tangentenverfahren.

$$e^{0,5x} = 5 - 2x$$

Verwenden Sie den Startwert $x_0 = 3,0$ und führen Sie noch 3 weitere Iterations-schritte bis zum Wert x_3 mit 4 Stellen Genauigkeit nach dem Komma durch.

Lösung:

$$f(x) = e^{0,5x} - 5 + 2x$$

$$f'(x) = 0,5 \cdot e^{0,5x} + 2$$

Newtonsche Tangentenverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit Startwert $x_0 = 3,0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{e^{0,5x_0} - 5 + 2x_0}{0,5 \cdot e^{0,5x_0} + 2} = 3,0 - \frac{e^{0,5 \cdot 3,0} - 5 + 2 \cdot 3,0}{0,5 \cdot e^{0,5 \cdot 3,0} + 2} = \underline{\underline{1,70741}}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{e^{0,5x_1} - 5 + 2x_1}{0,5 \cdot e^{0,5x_1} + 2} = \underline{\underline{1,46693}}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_2 - \frac{e^{0,5x_2} - 5 + 2x_2}{0,5 \cdot e^{0,5x_2} + 2} = \underline{\underline{1,46162}}$$

5.5 Beschreiben Sie den Verlauf der Funktion $y = \frac{\sin(x)}{x}$

a) Wo befinden sich die Nullstellen ?

b) Wie ist das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$?

c) Wo liegen die Extremwerte (im Vergleich zur normalen Sin-Funktion) ?

d) Welche Unstetigkeit liegt an x=0 vor?

e) Ist es evtl. eine gerade oder ungerade Funktion?

f) Fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung:

a) $\frac{\sin(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z} \wedge k \neq 0$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ da Nenner unendlich und Zähler beschränkt c)

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x\cos(x) - \sin x = 0\right) \wedge \left(x \neq 0\right) \Leftrightarrow \left(x = \tan x\right) \wedge \left(x \neq 0\right)$$

$\Rightarrow$ EW : Schnittpunkte der Gerade $y = x$ mit tan– Funktion

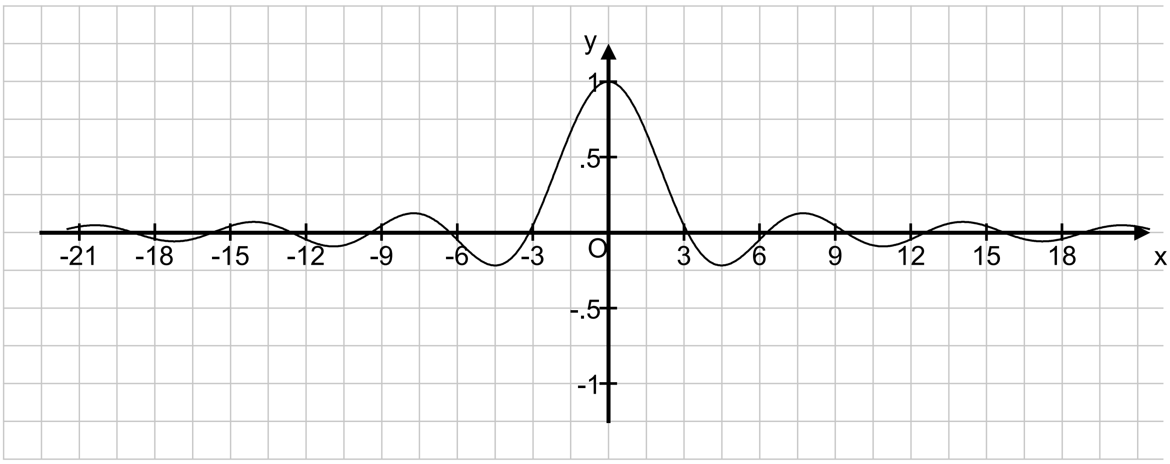
$\Rightarrow$ EW erst für sehr große $|x| \gg 1$ annähernd wie normaler Sinus bei $\frac{\pi}{2} + k\pi$

d)

$$\lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \qquad \Rightarrow \text{ hebbare Lücke, da } f(0) \text{ nicht ex.}$$

e) $$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x) \qquad \Rightarrow \text{ gerade Funktion}$$

f) Bemerkung: an x=0 nicht definiert !!!



5.6 Beschreiben Sie den Verlauf der Funktion $y = e^{-x^2}$

a) Wo befinden sich ggf. Nullstellen ?

b) Wie ist das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$?

c) Bestimmen Sie Extremwerte und Wendepunkte.

d) Gibt es Unstetigkeiten?

e) Ist es evtl. eine gerade oder ungerade Funktion?

f) Fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung:

a) $0 = e^{-x^2}$

$-x^2 = \ln(0)$ n.d. $\rightarrow$ die Funktion besitzt keine Nullstellen

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

c) Extremwerte : $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \leftrightarrow x_E = 0$

$f''(x) = 4x^2 \cdot e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

$f''(x_E) = f''(0) = -2 < 0$

$\rightarrow$ hinreichend für lok. EW, loakales Maximum wegen $f''(x_E) < 0$

$EW(0;0)$

Wendepunkte : $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$

$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ besitzt keine Wendepunkte

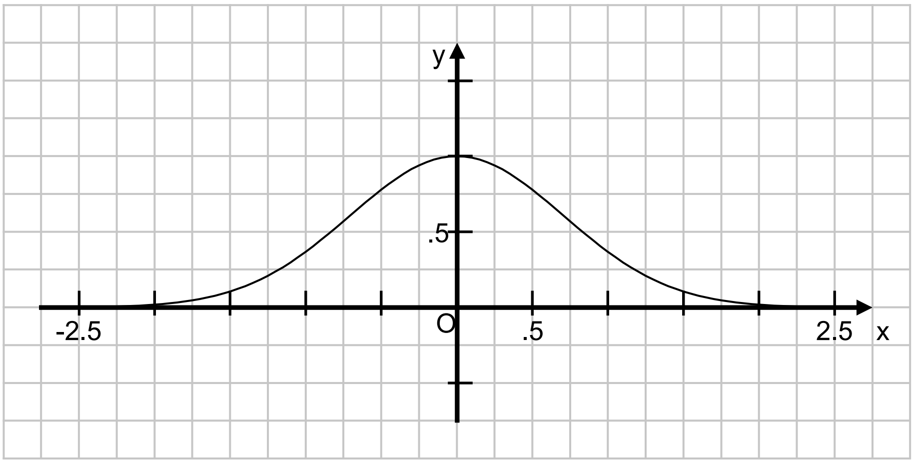
d) es gibt keine Unstetigkeiten

e) Bedingung für gerade Funktion :

$f(-x) = f(x)$

$e^{-(-x)^2} = e^{-x^2}$

$e^{-x^2} = e^{-x^2} \rightarrow$ gerade Funktion f)



5.7 Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen nach den in den Funktionen enthaltenen Unabhängigen:

a)

$$z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x$$

b)

$$z = f(x,y,t) = 3\cos(x+t) - 4\sin(x-t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3\sin(x+t) - \cos(x-t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -3\sin(x+t) + \cos(x-t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

c)

$$u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

d)

$$v = f(x,t) = e^{-3t}\sin(2t - 5x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -5e^{-3t}\cos(2t - 5x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -3e^{-3t}\sin(2t - 5x) + 2e^{-3t}\cos(2t - 5x)$$

e)

$$\varphi = f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

f)

$$y = f(x_1,x_2) = x_1\ln(3x_1+x_2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \ln(3x_1+x_2) + \frac{3x_1}{3x_1+x_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{x_1}{3x_1+x_2}$$