5. Schwerpunkt: Differenzialrechnung, Funktionen

5.1 Berechnen Sie für folgende Funktionen $y = f(x)$ die erste Ableitung y'

a) $y = \sqrt{a + 4x^2}$ b) $y = \dfrac{\ln(x+b)}{x^2 - b^2}$ c) $y = x \cdot \cos(3x - \varphi)$

d) $y \cdot \sin(3x) - xy = x - y$ e) $y = (ax^2 - 3)(bx^2 - 2)(cx^2 - 1)$

5.2 Berechnen Sie die unbestimmten Ausdrücke

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - x}{3x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 7}{4x^3 + 8}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x} \cdot e^{-x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \left[(x^2 - 4) \cdot \ln(x-2)\right]$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(ax) - 1}{\cos(4x) - 1}$

5.3 Eine Funktion sei wie folgt definiert:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0 \\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Welche Art von Unstetigkeit besitzt die Funktion an $x = 0$?
Bestimmen Sie dazu dort die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

5.4 Lösen Sie folgende nichtlineare Gleichung mit dem Newtonschen Tangentenverfahren.

$$e^{0,5x} = 5 - 2x$$

Verwenden Sie den Startwert $x_0 = 3{,}0$ und führen Sie noch 3 weitere Iterations-schritte bis zum Wert x_3 mit 4 Stellen Genauigkeit nach dem Komma durch.

5.5 Beschreiben Sie den Verlauf der Funktion $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$

a) Wo befinden sich die Nullstellen ?

b) Wie ist das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$?

c) Wo liegen die Extremwerte (im Vergleich zur normalen Sin-Funktion) ?

d) Welche Unstetigkeit liegt an x=0 vor?

e) Ist es evtl. eine gerade oder ungerade Funktion?

f) Fertigen Sie eine Skizze an.

5.6 Beschreiben Sie den Verlauf der Funktion $y = e^{-x^2}$

a) Wo befinden sich ggf. Nullstellen ?

b) Wie ist das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$?

c) Bestimmen Sie Extremwerte und Wendepunkte.

d) Gibt es Unstetigkeiten?

e) Ist es evtl. eine gerade oder ungerade Funktion?

f) Fertigen Sie eine Skizze an.

5.7 Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen nach den in den Funktionen enthaltenen Unabhängigen:

a) $z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ b) $z = f(x,y,t) = 3\cos(x+t) - 4\sin(x-t)$

c) $u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ d) $v = f(x,t) = e^{-3t}\sin(2t - 5x)$

e) $\varphi = f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ f) $y = f(x_1,x_2) = x_1 \ln(3x_1 + x_2)$