2. Lineare Gleichungssysteme (ohne Matrizen)

2.1 Lösen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 4 & \text{(I)} \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 9 & \text{(II)} \\ x & - & y & + & 2z & = & -3 & \text{(III)} \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{ll} & x + y + z = 4 \quad \text{(I)} \\ & 2x + 3y + 4z = 9 \quad \text{(II)} \\ & x - y + 2z = -3 \quad \text{(III)} \\ -1*\text{(III)}+\text{(I)}: & 2y - z = 7 \quad \text{(IV)} \\ -2*\text{(III)}*+\text{(II)}: & 5y = 15 \\ & \rightarrow \quad \underline{\underline{y = 3}} \\ \text{aus (IV)}: & 6 - z = 7 \rightarrow \underline{\underline{z = -1}} \\ \text{aus (I)}: & x + 3 - 1 = 4 \rightarrow \underline{\underline{x = 2}} \end{array}$$

2.2 Man löse:

a)
$$\begin{array}{l} 4x - 5y - 7z = 0 \quad \text{(I)} \\ x + 2y + 2z = 0 \quad \text{(II)} \\ 7x + y - z = 0 \quad \text{(III)} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} 7x - y + 5z = 1 \quad \text{(I)} \\ x + 3y - z = 7 \quad \text{(II)} \\ 15x + y + 9z = 2 \quad \text{(III)} \end{array}$$

Lösung:

b)

$$\begin{array}{l} 7x - y + 5z = 1 \quad \text{(I)} \\ x + 3y - z = 7 \quad \text{(II)} \\ \underline{15x + y + 9z = 2 \quad \text{(III)}} \end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
3*(I)+(II): & 22x + 14z = 10 \quad (IV) \\
(I)+(III): & \underline{22x + 14z = 2 \quad (V)} \\
-1*(IV)+(V): & 0 = 8 \text{ Widerspruch}
\end{array}
$$

$$L = \{\varnothing\}$$

a)

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x - 5y - 7z = 0 \quad (I) \\
 & x + 2y + 2z = 0 \quad (II) \\
 & \underline{7x + y - z = 0 \quad (III)} \\
-4*(II)+(I): & -13y - 15z = 0 \quad (IV) \\
-7*(II)+(III): & \underline{-13y - 15z = 0} \quad (V) \\
-1*(IV)+(V): & 0 = 0
\end{array}
$$

frei wählbare Variable: z.B. $z \in \mathbb{R}$

aus (IV): $-13y = 15z$

$$y = -\frac{15}{13}z$$

aus (II):

$$x + 2\left(-\frac{15}{13}z\right) + 2z = 0$$

$$x = \frac{4}{13}z$$

$$L = \left\{(x;y;z) = \left(\frac{4}{13}z; -\frac{15}{13}z; z\right); z \in \mathbb{R}\right\}$$

2.3 Lösen sie mit dem Gauß'schen Verfahren:

$$
\begin{array}{lllll}
2x & & & -u = 0 & (I) \\
x & +y & +2z & +u = 6 & (II) \\
2x & +2y & +4z & = 8 & (III) \\
x & -y & -2z & -2u = -6 & (IV)
\end{array}
$$

Lösung:

$$
\begin{array}{rll}
(I)+(II): & 3x + y + 2z = 6 & (V) \\
2*(II)+(IV): & 3x + y + 2z = 6 & (VI) \\
(III): & \underline{2x + 2y + 4z = 8} & (III) \\
(V)-(VI): & 0 = 0 & \\
-2*(V)+(III): & -4x = -4 & \\
 & \underline{\underline{x = 1}} & \\
\text{aus } (I): & 2x - u = 0 & \\
 & 2x = u & \\
 & \underline{\underline{u = 2}} & \\
\text{aus } (II): & x + y + 2z + u = 6 & \\
 & 3 + y + 2z = 6 & \\
 & \underline{\underline{y = 3 - 2z}} &
\end{array}
$$

$$L = \{(x, y, z, u) \mid x = 1;\ y = 3 - 2z;\ z \in \mathbb{R};\ u = 2\}$$

2.4 Aufgabe mit Lösung:

Untersuchen Sie folgende Aussagen über Gleichungssysteme (GS). Kreuzen Sie die jeweils richtigen Aussagen an. (Es können auch mehrere gleichzeitig richtig sein)

a) Gegeben ist ein lineares GS mit 3 Gleichungen für 5 Variable.

- ○ Dieses GS ist auf jeden Fall unlösbar.
- ○ Dieses GS hat genau eine Lösung.
- ⊗ Dieses GS ist entweder unlösbar oder hat unendlich viele Lösungen.

b) Gegeben ist ein lineares homogenes GS. Von diesem lässt sich die Koeffizientendeterminante D berechnen. Sie hat den Wert D=0.

- ⊗ Das GS hat genauso viele Gleichungen wie Variable.
- ○ Das GS kann unlösbar sein.
- ○ Das GS kann nur die triviale Lösung besitzen.
- ⊗ Das GS besitzt auf jeden Fall unendlich viele Lösungen.

c) Gegeben ist ein lineares GS. Von diesem lässt sich die Koeffizienten-determinante D berechnen. Sie hat den Wert D=-5.

- ○ Das GS kann nicht mit dem Gauß'schen Verfahren gelöst werden.
- ○ Das GS ist unlösbar.
- ⊗ Das GS lässt sich mit der Cramerschen Regel lösen.
- ⊗ Das GS lässt sich mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix lösen.