5. Schwerpunkt: Differenzialrechnung, Funktionen

5.1 Berechnen Sie für folgende Funktionen y = f(x) die erste Ableitung y'

a) $y = \sqrt{a + 4x^2}$ b) $y = \dfrac{\ln(x+b)}{x^2 - b^2}$

c) $y = x \cdot \cos(3x - \varphi)$ d) $y \cdot \sin(3x) - xy = x - y$

e) $y = (ax^2 - 3)(bx^2 - 2)(cx^2 - 1)$

Lösung:

a)

$$y = \sqrt{a+4x^2} = (a+4x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(a+4x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x = 4x(a+4x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{4x}{\sqrt{a+4x^2}}}}$$

b)

$$y = \frac{\ln(x+b)}{x^2 - b^2}$$

$$y' = \frac{(x^2 - b^2) \cdot \dfrac{1}{(x+b)} - \ln(x+b) \cdot 2x}{(x^2 - b^2)^2} = \frac{\cancel{(x+b)}(x-b) \cdot \dfrac{1}{\cancel{(x+b)}} - \ln(x+b) \cdot 2x}{(x^2 - b^2)^2}$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{(x-b) - 2x \cdot \ln(x+b)}{(x^2 - b^2)^2}}}$$

c)

$$y = x \cdot \cos\left(3x - \varphi\right)$$

$$y' = 1 \cdot \cos\left(3x - \varphi\right) - x \cdot \sin\left(3x - \varphi\right) \cdot 3$$

$$y' = \underline{\underline{\cos\left(3x - \varphi\right) - 3x \cdot \sin\left(3x - \varphi\right)}}$$

d)

$$y \cdot \sin(3x) - xy + y = x$$

$$y = \frac{x}{1 - x + \sin\left(3x\right)}$$

$$y' = \frac{\left(1 - x + \sin\left(3x\right)\right) - x\left(-1 + 3\cos\left(3x\right)\right)}{\left(1 - x + \sin\left(3x\right)\right)^2}$$

$$y' = \frac{1 + \sin\left(3x\right) - 3x\cos\left(3x\right)}{\left(1 - x + \sin\left(3x\right)\right)^2}$$

e)

$$y = \left(ax^2 - 3\right)\left(bx^2 - 2\right)\left(cx^2 - 1\right)$$

$$\text{NR}: \quad y = uvw \qquad y' = u'\left(vw\right) + u\left(vw\right)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$y' = 2x\left[a\left(bx^2 - 2\right)\left(cx^2 - 1\right) + b\left(ax^2 - 3\right)\left(cx^2 - 1\right) + c\left(ax^2 - 3\right)\left(bx^2 - 2\right)\right]$$

5.2 Berechnen Sie die unbestimmten Ausdrücke

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(2x\right) - x}{3x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 7}{4x^3 + 8}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x} \cdot e^{-x}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\left(x^2 - 4\right) \cdot \ln(x - 2)\right]$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos\left(ax\right) - 1}{\cos\left(4x\right) - 1}$

Lösung:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos(2x)-1}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+7}{4x^3+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{12x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-2}{24x}=\frac{6}{24}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

oder auch: $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+7}{4x^3+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}+\frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{4x^3}{x^3}+\frac{8}{x^3}\right)}=\frac{1-0+0}{4+0}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\cdot e^{-x}\right)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot e^x}\right)=\frac{1}{\infty}=\underline{\underline{0}}$$

d) $$\lim_{x\to 2}\left[\left(x^2-4\right)\cdot\ln(x-2)\right]=0\cdot\infty=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\ln(x-2)}{\left(x^2-4\right)^{-1}}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)^{-1}}{-2x\left(x^2-4\right)^{-2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\left(x^2-4\right)^2}{-2x(x-2)}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{-2x(x-2)}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)(x+2)^2}{-2x}\right]=\underline{\underline{0}}$$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-1}{\cos(4x)-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin(ax)}{-4\sin(4x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-a^2\cos(ax)}{-16\cos(4x)}=\underline{\underline{\frac{a^2}{16}}}$$

5.3 Eine Funktion sei wie folgt definiert:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0 \\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Welche Art von Unstetigkeit besitzt die Funktion an x = 0 ?
Bestimmen Sie dazu dort die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

Lösung:

linksseitiger Grenzwert : $g_{-}(0) = 2$

rechtsseitiger Grenzwert : $g_{+}(0) = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \dfrac{0}{0}$

$$g_{+}(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Da linksseitiger Grenzwert gleich dem rechtsseitigen Grenzwert ist und die Funktion nicht an $x = 0$ definiert ist, handelt es sich um eine Definitionslücke.

5.4 Lösen Sie folgende nichtlineare Gleichung mit dem Newtonschen Tangentenverfahren.

$$e^{0,5\,x} = 5 - 2x$$

Verwenden Sie den Startwert x_0 = 3,0 und führen Sie noch 3 weitere Iterationsschritte bis zum Wert x_3 mit 4 Stellen Genauigkeit nach dem Komma durch.

Lösung:

$$f\left(x\right)=e^{0,5x}-5+2x$$

$$f'\left(x\right)=0,5\cdot e^{0,5x}+2$$

Newtonsche Tangentenverfahren:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

mit Startwert $x_0=3,0$

$$x_1=x_0-\frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}=x_0-\frac{e^{0,5x_0}-5+2x_0}{0,5\cdot e^{0,5x_0}+2}=3,0-\frac{e^{0,5\cdot 3,0}-5+2\cdot 3,0}{0,5\cdot e^{0,5\cdot 3,0}+2}=\underline{\underline{1,70741}}$$

$$x_2=x_1-\frac{f\left(x_1\right)}{f'\left(x_1\right)}=x_1-\frac{e^{0,5x_1}-5+2x_1}{0,5\cdot e^{0,5x_1}+2}=\underline{\underline{1,46693}}$$

$$x_3=x_2-\frac{f\left(x_2\right)}{f'\left(x_2\right)}=x_2-\frac{e^{0,5x_2}-5+2x_2}{0,5\cdot e^{0,5x_2}+2}=\underline{\underline{1,46162}}$$

5.5 Beschreiben Sie den Verlauf der Funktion $y=\frac{\sin(x)}{x}$

a) Wo befinden sich die Nullstellen ?

b) Wie ist das asymptotische Verhalten für $x\rightarrow\pm\infty$?

c) Wo liegen die Extremwerte (im Vergleich zur normalen Sin-Funktion) ?

d) Welche Unstetigkeit liegt an x=0 vor?

e) Ist es evtl. eine gerade oder ungerade Funktion?

f) Fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung:

a) $\frac{\sin(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \wedge k \neq 0$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ da Nenner unendlich und Zähler beschränkt

c)

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x\cos(x) - \sin x = 0) \wedge (x \neq 0) \Leftrightarrow (x = \tan x) \wedge (x \neq 0)$$

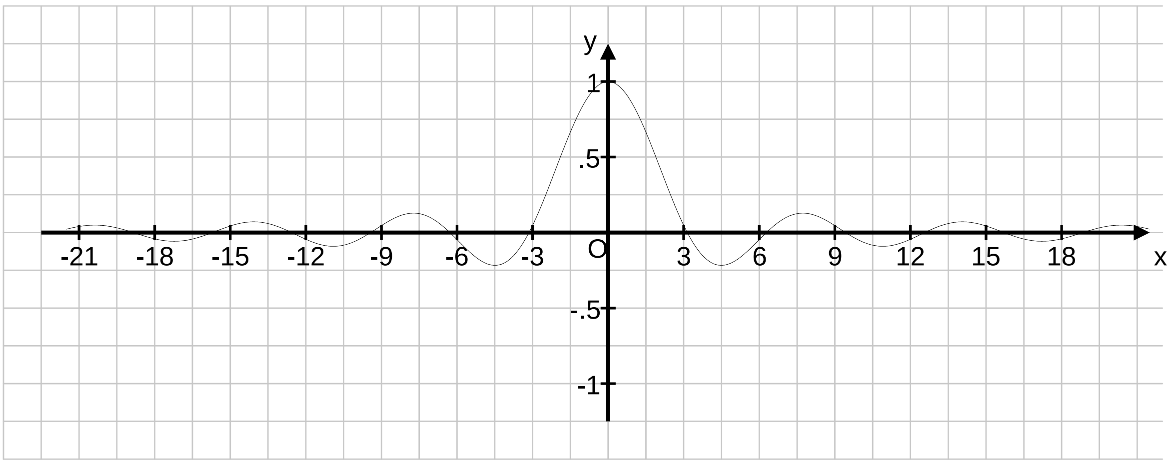
$\Rightarrow$ EW : Schnittpunkte der Gerade $y = x$ mit tan– Funktion

$\Rightarrow$ EW erst für sehr große $|x| \gg 1$ annähernd wie normaler Sinus bei $\frac{\pi}{2} + k\pi$

d) $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0\pm 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$ $\Rightarrow$ hebbare Lücke, da $f(0)$ nicht ex.

e) $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$ $\Rightarrow$ gerade Funktion

f) Bemerkung: an x=0 nicht definiert !!!



5.6 Beschreiben Sie den Verlauf der Funktion $y = e^{-x^2}$

a) Wo befinden sich ggf. Nullstellen ?

b) Wie ist das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$?

c) Bestimmen Sie Extremwerte und Wendepunkte.

d) Gibt es Unstetigkeiten?

e) Ist es evtl. eine gerade oder ungerade Funktion?

f) Fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung:

a) $0 = e^{-x^2}$

$-x^2 = \ln(0)$ n.d. $\rightarrow$ die Funktion besitzt keine Nullstellen

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

c) Extremwerte : $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \leftrightarrow x_E = 0$

$f''(x) = 4x^2 \cdot e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$

$f''(x_E) = f''(0) = -2 < 0$

$\rightarrow$ hinreichend für lok. EW, loakales Maximum wegen $f''(x_E) < 0$

$EW(0;0)$

Wendepunkte : $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$

$f''(x) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$

$f''(x) = 0$ $\rightarrow$ besitzt keine Wendepunkte

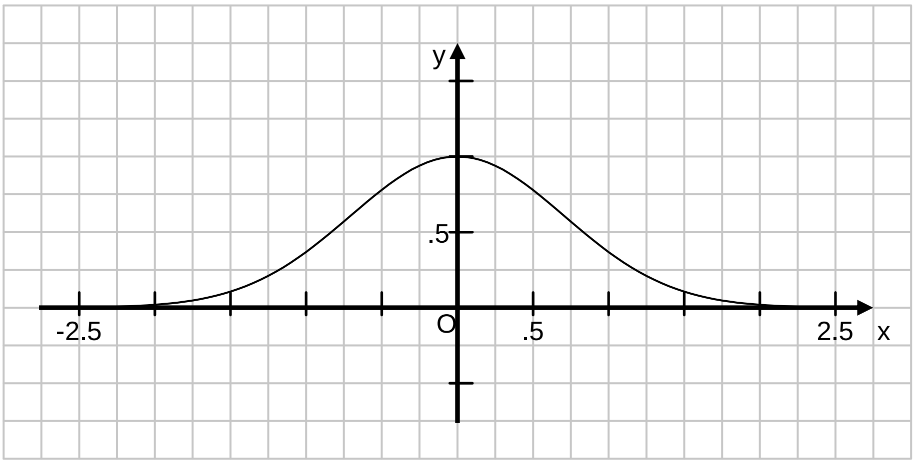
d) es gibt keine Unstetigkeiten

e) Bedingung für gerade Funktion :

$f(-x) = f(x)$

$e^{-(-x)^2} = e^{-x^2}$

$e^{-x^2} = e^{-x^2}$ $\rightarrow$ gerade Funktion f)



5.7 Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen nach den in den Funktionen enthaltenen Unabhängigen:

a)

$$z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x$$

b)

$$z = f(x,y,t) = 3\cos(x+t) - 4\sin(x-t)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3\sin(x+t) - \cos(x-t)$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = -3\sin(x+t) + \cos(x-t)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

c)

$$u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

d)

$$v = f(x,t) = e^{-3t}\sin(2t - 5x)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -5e^{-3t}\cos(2t - 5x)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -3e^{-3t}\sin(2t - 5x) + 2e^{-3t}\cos(2t - 5x)$$

e)

$$\varphi = f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

f)

$$y = f(x_1,x_2) = x_1\ln(3x_1+x_2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \ln(3x_1+x_2) + \frac{3x_1}{3x_1+x_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{x_1}{3x_1+x_2}$$