Eindimensionale stetige Zufallsvariablen (Kapitel 4)

Grundbegriffe:

$f(x)$ Dichtefunktion der Zufallsvariable x
$F(x)$ Verteilungsfunktion der Zufallsvariable x
$E(x)$ Erwartungswert der Zufallsvariable x
$Var(x)=\sigma^2$ Varianz der Zufallsvariable x
$P(a \leqslant x \leqslant b)$ Wahrscheinlichkeit

Formelsammlung: S. 51 – 52

Übungsaufgaben:

(1) Für eine stetige Zufallsvariable x gilt folgende Dichtefunktion:

$$f(x)=\{2\sqrt{x}-2x+\frac{4}{6}, 0\leqslant x\leqslant 1\,; 0, sonst.$$

Ermitteln Sie,
a) den Erwartungswert der Variablen x
b) die Streuung
c) die Wahrscheinlichkeit, dass die Variable Werte zwischen 0,2 und 1,2 annimmt.

a)

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x*f(x)\,dx$$ FS S.52 Erwartungswert

$$E(x)=\int_0^1 x*(2\sqrt{x}-2x+\frac{4}{6})\,dx$$

$$E(x)=\int_0^1 2x^{1,5}-2x^2+\frac{2}{3}x\,dx$$

$$E(x)=[\frac{4}{5}x^{2,5}-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{6}x^2]_0^1$$

$$E(x)=\frac{4}{5}-\frac{2}{3}+\frac{2}{6}-0$$

$$E(x)=0{,}467$$

b)

$$Var(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 * f(x)\,dx-E(x)^2$$ FS S.52 Varianz

$$Var(x)=\int_{0}^{1} x^2*(2\sqrt{x}-2x+\frac{4}{6})\,dx-0{,}467^2$$

$$Var(x)=\int_{0}^{1}(2x^{2,5}-2x^3+\frac{4}{6}x^2)\,dx-0.467^2$$

$$Var(x)=[\frac{4}{7}x^{3,5}-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{9}x^3]_0^1-0{,}467^2$$

$$Var(x)=\frac{4}{7}-\frac{1}{2}+\frac{2}{9}-0-0{,}467^2$$

$$Var(x)=\sigma^2=0{,}075561794$$

$$\sqrt{(Var(x))}=\sigma=\pm 0{,}274885056$$

c)

$$P(0{,}2\leqslant x\leqslant 1)=\int_{0,2}^{1} f(x)\,dx$$ FS S.51 Wahrscheinlichkeit

$$P(0{,}2\leqslant x\leqslant 1)=\int_{0,2}^{1} 2\sqrt{x}-2x+\frac{4}{6}\,dx$$

$$P(0{,}2\leqslant x\leqslant 1)=[\frac{4}{3}x^{1,5}-x^2+\frac{4}{6}x]_{0,2}^{1}$$

$$P(0{,}2\leqslant x\leqslant 1)=\frac{4}{3}-1+\frac{2}{3}-(\frac{4}{3}0{,}2^{1,5}-0{,}2^2+\frac{4}{6}0{,}2)$$

$$P(0{,}2\leqslant x\leqslant 1)=1-0{,}2126$$

$$P(0{,}2\leqslant x\leqslant 1)=78{,}74\,\%$$

(2) Die Verspätung (in Minuten) eines Zuges sei durch folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f(x)=\{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x\,,\,0<x<4\,;0,sonst.$$

a) Kann man diese Funktion als Dichtefunktion nutzen?
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Verspätung des Busses zwischen einer und zwei Minuten liegt:
c) Geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion an.

a)

$f_x(x) \geqslant 0$ ist erfüllt FS S.51 Bedingungen

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ ist erfüllt

b)

$P(1 \leqslant x \leqslant 2) = 31{,}25\,\%$

c)

$F(x) = \{0,\, \textit{für}\ x \leqslant 0\,;\, \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2,\, \textit{für}\ 0 < x < 4\,;\, 1,\, \textit{für}\ x \geqslant 4$

(3) Gegeben ist folgende Funktion:

$f(x) = \{0,\, \textit{für} -\infty < x < 0\,;\, a(x^3 - x^2),\, \textit{für}\ 0 \leqslant x \leqslant 4\,;\, 0,\, \textit{für}\ 1 < x < 1$

a) Für welchen Wert a ist f(x) Dichtefunktion einer Zufallsgröße X?
b) Berechnen Sie P(0 □ X □ 0,5).
c) Bestimmen Sie Erwartungswert E(x), Varianz Var(x) und Standardabweichung.

a)
$a = -12$

b)
$P(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}) = 31{,}25\,\%$

c)
$E(x) = 0{,}6$

$\sigma^2 = 0{,}04$

$\sigma = \pm 0{,}02$

(4) Weitere Übungsaufgaben:

Weitere Übungsaufgaben zu diesem Kapitel sind erhältlich im „share“-Ordner der Fakultät Wirtschaft im Unterordner „Statistik“.

Mit Blick auf die Klausur wäre es hilfreich die Aufgaben der ausgegebenen Klausuren zu üben.