Eindimensionale stetige Zufallsvariablen (Kapitel 4)

Grundbegriffe:

$f(x)$ Dichtefunktion der Zufallsvariable x

$F(x)$ Verteilungsfunktion der Zufallsvariable x

$E(x)$ Erwartungswert der Zufallsvariable x

$Var(x)=\sigma^2$ Varianz der Zufallsvariable x

$P(a \leqslant x \leqslant b)$ Wahrscheinlichkeit

Formelsammlung: S. 51 – 52

Übungsaufgaben:

(1) Eine Zufallsvariable X besitzt die Dichtefunktion

$$f(x)=\{\frac{1}{18}(3+2*x), 2\leqslant x\leqslant 4; 0, sonst.$$

a) Überprüfen Sie, ob es sich bei der angegebenen Funktion um eine Dichtefunktion handelt.
b) Man bestimme die zugehörige Verteilungsfunktion F(x).
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_1(2 \leq X \leq 3)$, $P_2(X < 2)$ und $P_3(2{,}5 \leq X \leq 4)$.

d) Ermitteln Sie den Erwartungswert der Variablen x.
e) Ermitteln Sie die Streuung.

a)

$f_x(x)\geqslant 0$ ist erfüllt: FS S.51 Bedingungen

$$f_x(2)=\frac{7}{18}\geqslant 0$$

$$f_x(4)=\frac{11}{18}\geqslant 0$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$ ist erfüllt

$$\int_2^4 \left(\frac{1}{18} * (3+2x)\right) = 1$$

$$\int_2^4 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}x\right) = 1$$

$$\left[\frac{1}{6}x + \frac{1}{18}x^2\right]_2^4 = 1$$

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{9} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = 1$$

b)

$$F(x) = \int_2^x f(v)\,dv$$ FS S.52 Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_2^x \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}v\right) dv$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{6}v + \frac{1}{18}v^2\right]_2^x$$

$$F(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{18}x^2 - \frac{5}{9}$$

$$F(x) = \{0, \textit{für } x < 2; \frac{1}{6}x + \frac{1}{18}x^2 - \frac{5}{9}, \textit{für } 2 \geqslant x \leqslant 4; 1, \textit{für } x > 4$$

c)

$$P_1(2 \leqslant x \leqslant 3) = 44{,}44\%$$

$$P_2(x < 2) = 0\%$$

$$P_3(2{,}5 \leqslant x \leqslant 4) = 79{,}2\%$$

d)

$$E(x) = \frac{83}{27} = 3{,}074$$

e)

$$Var(x) = \sigma^2 = \frac{239}{729} = 0{,}3278$$

$$\sqrt{(Var(x))} = \sigma = \pm 0{,}5726$$

(2) Für die Verspätung X (in Minuten) eines Flugzeugs einer bestimmten Fluggesellschaft auf dem Flughafen Erfurt wurde folgenden Dichtefunktion ermittelt:

$$f(x)=\{x-\sqrt{x}+\frac{7}{6,}0\leqslant x\leqslant 1;0, sonst.$$

Ermitteln Sie
a) die durchschnittliche Verspätung des Flugzeuges.
b) die Streuung
c) die Wahrscheinlichkeit, dass die Verspätung zwischen 0,3 und 1,5 min beträgt.

a)

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x*f(x)\,dx$$ FS S.52 Erwartungswert

$$E(x)=\int_0^1 x*(x-\sqrt{x}+\frac{7}{6})\,dx$$

$$E(x)=\int_0^1 x^2-x^{1,5}+\frac{7}{6}x\,dx$$

$$E(x)=[\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}x^{2,5}+\frac{7}{12}x^2]_0^1$$

$$E(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{7}{12}-0$$

$$E(x)=0,5167$$

b)

$$Var(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2*f(x)\,dx-E(x)^2$$ FS S.52 Varianz

$$Var(x)=\int_0^1 x^2*(x-\sqrt{x}+\frac{7}{6})\,dx-0,5167^2$$

$$Var(x)=\int_0^1 (x^3-x^{2,5}+\frac{7}{6}x^2)\,dx-0.5167^2$$

$$Var(x)=[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{7}x^{3,5}+\frac{7}{18}x^3]_0^1-0,5167^2$$

$$Var(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{7}{18}-0-0,5167^2$$

$$Var(x)=\sigma^2=0,0862$$

$$\sqrt{(Var(x))}=\sigma=\pm 0,2936$$

c)

$P(0{,}3 \leqslant x \leqslant 1) = \int_{0{,}3}^{1} f(x)\,dx$ FS S.51 Wahrscheinlichkeit

$P(0{,}3 \leqslant x \leqslant 1) = \int_{0{,}3}^{1} x - \sqrt{x} + \frac{7}{6}\,dx$

$P(0{,}3 \leqslant x \leqslant 1) = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{1{,}5} + \frac{7}{6}x]_{0{,}3}^{1}$

$P(0{,}2 \leqslant x \leqslant 1) = 1 - 0{,}2855$

$P(0{,}2 \leqslant x \leqslant 1) = 71{,}45\,\%$

(3) Weitere Übungsaufgaben:

Weitere Übungsaufgaben zu diesem Kapitel sind erhältlich im „share“-Ordner der Fakultät Wirtschaft im Unterordner „Statistik“.