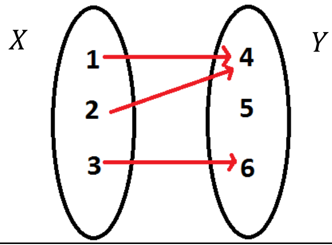
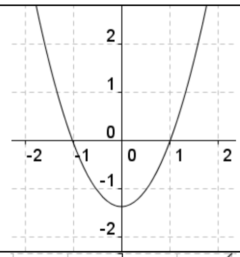
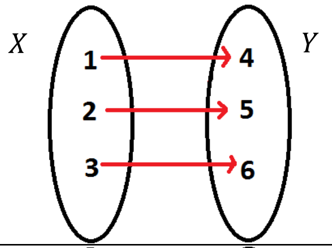
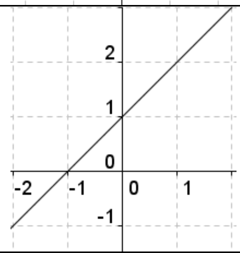
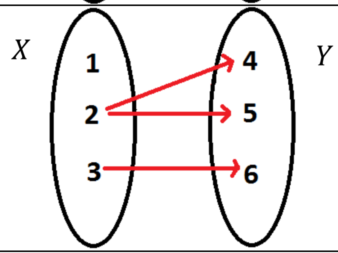
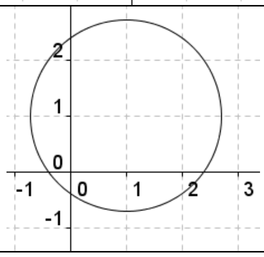
5. Funktionen

5.1. Begriffe

Funktionen sind eindeutige oder eineindeutige Relationen[1].
Eindeutige Relationen ordnen jedem x-Wert genau einen y-Wert zu.
Eineindeutige Relationen ordnen jedem x-Wert genau einen y-Wert und jedem y-Wert genau einen x-Wert zu.

Veranschaulichung:

<table>
<tr>
<td>eindeutige Funktion,
da zu jedem x genau ein y gehört</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>eineindeutige Funktion,
da zu jedem x genau ein y gehört und umgekehrt</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>keine Funktion,
da dem x-Wert 2 zwei verschiedene y-Werte zugeordnet werden</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

5.2. Zahlenfolgen

Zahlenfolgen a_n sind spezielle Funktionen, die von den natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen abbilden, kurz $a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Das bedeutet, der x-Wert einer Zahlenfolge ist immer eine natürliche Zahl, während der y-Wert eine reelle Zahl sein darf.

Beispiel 1:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	…
1	5	9	13	17	…

Beispiel 2:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	…
1	2	4	8	16	…

Beispiel 3:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	…
-5	2	8	-4	0	…

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Relation

Wie in den Beispielen zu erkennen ist, gibt es Zahlenfolgen mit Bildungsgesetzen und Zahlenfolgen ohne Bildungsgesetze. Von den Zahlenfolgen mit Bildungsgesetz sind die interessantesten die arithmetischen und die geometrischen Zahlenfolgen.

5.2.1. Arithmetische Zahlenfolgen

Die Zahlenfolge aus Beispiel 1 ist eine arithmetische Zahlenfolge. Besonderheit hierbei ist, dass zum vorherigen Folgeglied a_{n-1} immer eine konstante Zahl d addiert wird, um das nächste Folgeglied a_n zu berechnen. Damit ergibt sich eine rekursive[2] Bildungsvorschrift für arithmetische Zahlenfolgen:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + d}$$

d ergibt sich aus $d = a_n - a_{n-1}$. Das muss für alle Folgeglieder der Fall sein. Wichtig ist außerdem die Angabe eines sog. Basisfalls, damit die Berechnungen auch einen Abschluss finden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Für das Beispiel 1 kann man die Bildungsvorschrift $a_n = a_{n-1} + 4$ mit $a_1 = 1$ angeben.
Um beispielsweise a_5 zu berechnen, geht man folgendermaßen vor:

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + 4 \\ &= a_3 + 4 + 4 \\ &= a_2 + 4 + 4 + 4 \\ &= a_1 + 4 + 4 + 4 + 4 \\ &= 1 + 4 + 4 + 4 + 4 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Nun kann man daraus eine explizite Berechnungsvorschrift herleiten:

$$a_5 = \underbrace{1}_{a_1} + \underbrace{4 + 4 + 4 + 4}_{4 \cdot d = (5-1) \cdot d}$$

Daraus ergibt sich als allgemeine Bildungsvorschrift für arithmetische Zahlenfolgen

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Für Beispiel 1 ist diese allgemeine Bildungsvorschrift $a_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 4 \cdot n - 3$

5.2.2. Geometrische Zahlenfolgen

Die Zahlenfolge aus Beispiel 2 ist eine geometrische Zahlenfolge. Besonderheit hierbei ist, dass zum vorherigen Folgeglied a_{n-1} immer eine konstante Zahl q multipliziert wird, um das nächste Folgeglied a_n zu berechnen. Damit ergibt sich eine rekursive Bildungsvorschrift für geometrische Zahlenfolgen:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot q}$$

q ergibt sich logischerweise aus $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Das muss für alle Folgeglieder der Fall sein. Wichtig ist auch hier die Angabe eines Basisfalls.

Für das Beispiel 2 kann man die Bildungsvorschrift $a_n = a_{n-1} \cdot 2$ mit $a_1 = 1$ angeben.
Um beispielsweise a_5 zu berechnen, geht man folgendermaßen vor:

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 \cdot 2 \\ &= a_3 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= a_2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= a_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Rekursion

Nun kann man daraus eine explizite Berechnungsvorschrift herleiten:

$$a_5 = \underbrace{1}_{a_1} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{q^4 = q^{5-1}}$$

Daraus ergibt sich als allgemeine Bildungsvorschrift für arithmetische Zahlenfolgen

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Für Beispiel 2 ist diese allgemeine Bildungsvorschrift $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

5.2.3. Sonstige Zahlenfolgen

Neben diesen beiden Zahlenfolgen gibt es auch weitere Zahlenfolgen, die ein Bildungsgesetz haben, sich aber nicht in eine der beiden Kategorien einordnen lassen.

Beispiele:

- $a_n = n^2$
- Fibonacci-Folge[3]: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- …

Auch gibt es Zahlenfolgen, die kein Bildungsgesetz besitzen.

Beispiele:

- Folge der Primzahlen
- Folge der Tagesdurchschnittstemperaturen an aufeinanderfolgenden Tagen
- uvm.

5.2.4. Monotonie von Zahlenfolgen

Die Monotonie einer Zahlenfolge sagt etwas über den Verlauf der Zahlenfolge aus, also ob sie steigt oder fällt. Um die Monotonie allgemein nachzuweisen, gelten folgende Beziehungen:

monoton steigend: $a_n > a_{n-1}$

monoton fallend: $a_n < a_{n-1}$

Beispiel 1:

Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = 4n - 3$. Vermutet wird, dass diese Zahlenfolge monoton steigend ist. Für den Nachweis wird die Formel $a_n > a_{n-1}$ verwendet.

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n-1} \\ 4n - 3 &> 4(n-1) - 3 \\ 4n - 3 &> 4n - 4 - 3 \\ -3 &> -7 \quad w.A. \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, dass $a_n = 4n - 3$ für alle n steigend ist.

Beispiel 2:

Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = n^2 - 4n + 3$. Vermutet wird, dass diese Zahlenfolge monoton fallend ist. Für den Nachweis wird die Formel $a_n < a_{n-1}$ verwendet.

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n-1} \\ n^2 - 4n + 3 &< (n-1)^2 - 4(n-1) + 3 \\ n^2 - 4n + 3 &< n^2 - 2n + 1 - 4n + 4 + 3 \\ n^2 - 4n + 3 &< n^2 - 6n + 8 \\ 2n &< 5 \\ n &< \frac{5}{2} \end{aligned}$$

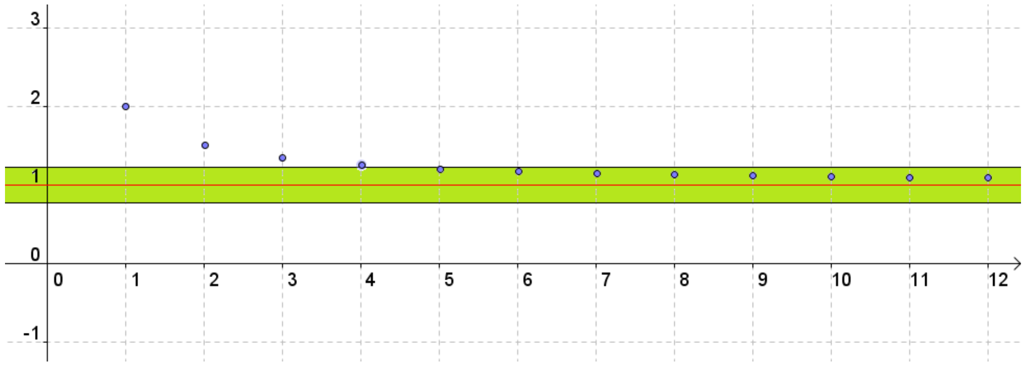
Damit ergibt sich, dass die Zahlenfolge für alle $n < 2{,}5$ fallend ist und für alle $n \geq 2{,}5$ steigend ist.

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge

5.2.5. Grenzwerte von Zahlenfolgen

Der Grenzwert g einer Zahlenfolge a_n ist derjenige Wert, dem sich die Zahlenfolge im Unendlichen annähert, d.h. das in der ε-Umgebung $U_\varepsilon = [g - \varepsilon; g + \varepsilon]$ unendlich viele Glieder der Folge liegen und nur endlich viele außerhalb dieser Umgebung. Dies lässt sich auch durch die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ beschreiben.
Eine Zahlenfolge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt.
Eine Zahlenfolge heißt divergent, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

Veranschaulichung:



Erklärung:
Die blauen Punkte spiegeln die Zahlenfolge a_n wider. Die rote Linie kennzeichnet den Grenzwert g. Der grüne Bereich um den Grenzwert g ist die ε-Umgebung. Auch hier erkennt man, dass sich nur endlich viele Elemente (nämlich genau 4) außerhalb dieser ε-Umgebung befinden und die restlichen (unendlich vielen) Elemente liegen innerhalb dieser ε-Umgebung um den Grenzwert g.

Berechnung der Grenzwerte von Zahlenfolgen:
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um den Grenzwert von Zahlenfolgen zu bestimmen:

- Zahlenfolge zeichnen und Grenzwert abschätzen
  - Wertetabelle anlegen
  - Graph im Koordinatensystem darstellen
  - ungünstig, da Genauigkeit oft nicht ausreichend
- mit Hilfe des Taschenrechners große n einsetzen und Grenzwert abschätzen
  - verschieden große n ausprobieren
  - Vermutungen anstellen
  - ungünstig, da Genauigkeit oft nicht ausreichend
- mit Hilfe mathematischer Umformungen den Grenzwert *genau* berechnen
  - Vorgehen stark abhängig von gegebener Zahlenfolge
  - sinnvoll: Nullfolgen[4] erzeugen, z.B. durch Ausklammern der höchsten Potenz

Beispiel 1:
Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{2n-3}{5n+8}$.

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{5n+8}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\left(2 - \frac{3}{n}\right)}{n\left(5 + \frac{8}{n}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 - \overbrace{\frac{3}{n}}^{=0}}{5 + \underbrace{\frac{8}{n}}_{=0}}\right) = \frac{2}{5}$$

Diese Zahlenfolge ist konvergent, da sie einen Grenzwert besitzt.

[4] Nullfolgen sind Folgen, deren Grenzwert 0 ist, z.B. $a_n = \frac{1}{n}$

Beispiel 2:

Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = 2n + 3$.

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2n+3) = \infty$$

Diese Zahlenfolge ist divergent, da sie keinen Grenzwert besitzt.

Beispiel 3:

Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{5n^2-3n-9}{4n^2+2n+3}$. Gesucht werden alle Glieder der Folge, die innerhalb der ε-Umgebung von 0,001 um den Grenzwert g liegen.

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2-3n-9}{4n^2+2n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\cdot\left(5-\frac{3}{n}-\frac{9}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-\frac{3}{n}-\frac{9}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\right) = \frac{5}{4}$$

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{5n^2-3n-9}{4n^2+2n+3} - \frac{5}{4}\right| < 0{,}001$$

$$\left|\frac{4\cdot(5n^2-3n-9) - 5\cdot(4n^2+2n+3)}{4\cdot(4n^2+2n+3)}\right| < 0{,}001$$

$$\left|\frac{20n^2-12n-36-20n^2-10n-15}{16n^2+8n+12}\right| < 0{,}001$$

Zusammenfassen und Betrag „wegdiskutieren“
Merke: $n > 0$

$$22n + 51 < 0{,}001\cdot(16n^2+8n+12)$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ (-1)\cdot x, & x < 0 \end{cases}$$

$$22n + 51 < 0{,}016n^2 + 0{,}008n + 0{,}012$$

$$0 < 0{,}016n^2 - 21{,}992n - 50{,}988$$

$$n_{1/2} = \frac{-(-21{,}992) \pm \sqrt{21{,}992^2 - 4\cdot 0{,}016\cdot(-50{,}988)}}{2\cdot 0{,}016}$$

$$n_1 > 1376{,}815$$
$$n_2 < -2{,}315$$

n_2 entfällt als Lösung, da sie negativ ist, n jedoch echt größer als 0 sein muss
Daraus ergibt sich, dass ab dem 1377ten Folgeglied alle weiteren Folgeglieder innerhalb der angegebenen ε-Umgebung liegen.

5.3. Grundtypen von Funktionen

1) Potenzfunktion: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$
2) Wurzelfunktion: $f(x) = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$
3) Exponentialfunktion: $f(x) = k\cdot a^x$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{0;1\}$
4) Logarithmusfunktion: $f(x) = k\cdot\log_a x$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{0;1\}$
5) Winkelfunktionen: $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \tan(x)$

- Diese Funktionen können mittels Summe, Produkt, Differenz und Quotient zu neuen Funktionen verknüpft werden!

5.4. Eigenschaften von Funktionen

Funktionen haben ganz bestimmte Eigenschaften, mittels derer man sie auch rekonstruieren könnte. Die nachfolgende Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, es sollen lediglich die häufigsten zu untersuchenden Eigenschaften von Funktionen aufgezählt werden:

1. Definitionsbereich, Wertebereich
2. Verhalten im positiven und negativen Unendlichen
3. Verhalten an nicht definierten Stellen
4. asymptotisches Verhalten
5. Symmetrie
6. Schnittpunkte mit den Achsen
7. Extrema und Art der Extrema
8. Wendepunkte
9. Graph
10. Monotonie
11. Krümmung (Kurvenverhalten)

5.4.1. Grenzwerte von Funktionen

Wie auch bei Zahlenfolgen können Funktionen Grenzwerte besitzen. In der Regel wird der Grenzwert im positiven oder negativen Unendlichen untersucht. Es wird durch mathematische Umformungen berechnet, gegen welchen „Wert" die gegebene Funktion strebt.

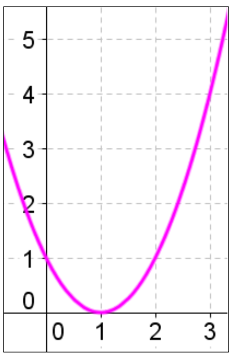
Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-2}{x^2+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\cdot\left(5-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{Nullfolge}}{1+\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{Nullfolge}}\right)=\frac{5-0}{1+0}=5$$

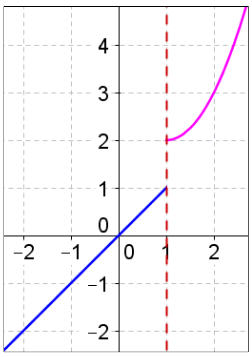
5.4.2. Stetigkeit

Unter stetigen Funktionen in der Mathematik versteht man Funktionen, bei denen beliebig kleine Änderungen der x-Werte zu beliebig kleinen Änderungen der y-Werte führen. Umgangssprachlich ausgedrückt heißt dies, dass stetige Funktionen ohne Absetzen des Bleistifts gezeichnet werden können.

Beispiel:



stetige Funktion



unstetige Funktion

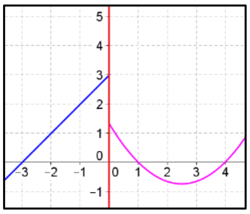
Um Funktionen auf Stetigkeit an einer Stelle x_0 zu überprüfen, müssen der linksseitige $\lim_{\left(x\to x_0-\frac{1}{n}\right)} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{\left(x\to x_0+\frac{1}{n}\right)} f(x)$ der Stelle x_0 untersucht werden. Damit die Funktion an der Stelle x_0 stetig ist, muss

$$\lim_{x\to x_0-\frac{1}{n}} f(x) = \lim_{x\to x_0+\frac{1}{n}} f(x) \qquad \text{für } n\to\infty$$

gelten.

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & für \quad x<0 \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{3} & für \quad x \geq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0-\frac{1}{n}} f(x) = \lim_{x\to 0-\frac{1}{n}} (x+3) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(0-\frac{1}{n}\right)+3\right) = 3$$

$$\lim_{x\to 0+\frac{1}{n}} f(x) = \lim_{x\to 0+\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\left(0+\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{5}{3}\cdot\left(0+\frac{1}{n}\right)+\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Da der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert verschieden sind, ist die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig.

5.4.3. Differenzialquotient und Differenzierbarkeit

Für die Differenzierbarkeit einer Funktion gibt es verschiedene mathematische Zugänge. Der in der Schule gebräuchlichste ist der des Tangentenproblems. Dabei soll versucht werden an einen beliebigen Punkt einer Funktion eine Tangente[5] anzulegen. Tangenten sind Geradengleichungen der Form $t(x) = y_t = m \cdot x + n$. Sind zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben, so wird der Anstieg mit

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

dem sogenannten Differenzenquotienten, bestimmt.

Um den Anstieg einer Funktion in einem Punkt P_1 zu bestimmen, wird ein zweiter Punkt P_2 dazu genommen und mittels Annäherung an P_1 der Anstieg bestimmt:

$$\lim_{x_2\to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Wenn nur der Abstand h zwischen x_1 und x_2 betrachtet wird und dieser immer kleiner werden soll, ergibt sich daraus für $x_2 = x_1 + h$ der sogenannte Differenzialquotient

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

Mit Hilfe dieses Grenzwerts wird nun der Anstieg einer Funktion $f(x)$ an einer ganz bestimmten Stelle x_1 berechnet. Verallgemeinert man diese Betrachtungsweise auf jeden möglichen Punkt der Funktion, so erhält man wieder eine Funktion, die 1. Ableitung $f'(x)$ genannt wird.

Beispiel 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 6x + 4$. Es soll eine Tangente im Punkt $P(-1/-1)$ angelegt werden. Dazu wird zunächst der Anstieg mittels Differenzialquotient bestimmt:

[5] lat.: tangere - berühren

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2+6\cdot(-1+h)+4-(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-2h+h^2-6+6h+4+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+4}{1}=4$$

Der Anstieg $m=4$ und der Punkt $P(-1/-1)$ werden nun in die Tangentengleichung $y_t=m\cdot x+n$ eingesetzt, um n zu bestimmen:

$$-1=4\cdot(-1)+n$$
$$3=n$$

Damit kann die Tangentengleichung angegeben werden:

$$y_t=4x+3$$

Beispiel 2:

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x)=\begin{cases}-3x+3 & für \quad x\le 2\\ x^2-7x+7 & für \quad x>2\end{cases}$$

Es soll überprüft werden, ob die Funktion, die an der Stelle $x_0=2$ stetig ist, auch differenzierbar ist. Dabei muss der linksseitige Wert des Differenzialquotienten gleich dem rechtsseitigen Wert des Differenzialquotienten sein.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3(2+h)+3-(-3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-6-3h+3+3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3h}{h}$$
$$=-3$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-7\cdot(2+h)+7-(-3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-14-7h+7+3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3h+h^2}{h}$$
$$=-3$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktion an dieser Stelle differenzierbar ist. Wären die Grenzwerte nicht gleich, wäre die Funktion an der Stelle nicht differenzierbar.

Beispiel 3:

Natürlich kann man auch ganz allgemein für jeden beliebigen Punkt $P(x_0/f(x_0))$ einer Funktion $f(x)$ den Anstieg bestimmen. Sei $f(x)=x^2+5x+3$. Es soll der Anstieg an der Stelle x_0 bestimmt werden:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2+5(x_0+h)+3-[x_0^2+5x_0+3]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+2x_0h+h^2+5x_0+5h+3-x_0^2-5x_0-3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2+5h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h^2+5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x_0+h^2+5)$$
$$=2x_0+5$$

5.4.4. Ableitungsregeln

Aus der in Beispiel 3 des letzten Abschnitts vorgestellten Methode können nun verschiedene Regeln hergeleitet werden. Sinn dabei ist, die doch recht lange Rechnung zur Bestimmung des Anstiegs zu verkürzen.

	Funktion	Beispiel
Konstantenregel	$f(x) = a$ $f'(x) = 0$	$f(x) = 5$ $f'(x) = 0$
Potenzregel	$f(x) = x^n$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^2$ $f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot g(x)$ $f'(x) = a \cdot g'(x)$	$f(x) = 5 \cdot x^2$ $f'(x) = 5 \cdot 2x = 10x$
Summenregel	$f(x) = g(x) \pm h(x)$ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$	$f(x) = 5x^2 + 3x$ $f'(x) = 10x + 3$
Produktregel	$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$	$f(x) = 3x^2 \cdot 4x$ $f'(x) = 6x \cdot 4x + 3x^2 \cdot 4 = 36x^2$
Quotientenregel	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$	$f(x) = \frac{3x^2}{4x}$ $f'(x) = \frac{6x \cdot 4x - 3x^2 \cdot 4}{(4x)^2} = \frac{12x^2}{16x^2} = \frac{3}{4}$
Kettenregel	$f(x) = g\big(h(x)\big)$ $f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$	$f(x) = (4x^2 + 5x)^{13}$ $f'(x) = 13 \cdot (4x^2 + 5x)^{12} \cdot (8x + 5)$

5.4.5. Beispiele für Kurvendiskussionen

5.4.5.1. Ganzrationale Funktion

$$\boxed{f(x) = x^3 + 2x^2 + x}$$

0. Ableitungen

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$$
$$f''(x) = 6x + 4$$
$$f'''(x) = 6$$

1. Definitionsbereich, Wertebereich

DB: $x \in \mathbb{R}$

WB: $y \in \mathbb{R}$

2. Verhalten im positiven und negativen Unendlichen

$$\lim_{x \to \infty} (x^3 + 2x^2 + x) = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 + 2x^2 + x) = -\infty$$

3. Verhalten an nicht definierten Stellen

wird nur untersucht, falls es im Definitionsbereich nicht definierte Stellen gibt

4. asymptotisches Verhalten

muss nicht bei ganzrationalen Funktionen untersucht werden

5. Symmetrie

Untersuchung, ob achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung
Dabei helfen zwei Formeln:

Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$
Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x$
$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 + (-x) = -x^3 + 2x^2 - x$
$-f(-x) = -[-x^3 + 2x^2 - x] = x^3 - 2x^2 + x$

Wie zu erkennen ist, gilt

$f(x) \neq f(-x)$ und $f(x) \neq -f(-x)$

und damit ist nachgewiesen, dass die Funktion weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

6. Schnittpunkte mit den Achsen

Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen):

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 + 2x^2 + x &= 0 \\ x \cdot (x^2 + 2x + 1) &= 0 \\ x \cdot (x+1)^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte mit der x-Achse liegen bei $S_{x_1}(0/0)$ und $S_{x_2}(-1/0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ f(0) &= (0)^3 + 2 \cdot (0)^2 + (0) \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0/0)$.

7. Extrema und Art der Extrema

Bestimmung der Extrema

$f'(x) = 0$

$3x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2 \cdot 3} \pm \sqrt{\frac{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}{4 \cdot 3^2}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{16 - 12}{36}} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$$

$x_1 = -\frac{1}{3}$

$x_2 = -1$

Art der Extrema ermitteln mit $f''(x) = 6x + 4$

$f''(x_1) = f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 4 = 2$ → Minimum, da $f''(x_1) > 0$

$f''(x_2) = f''(-1) = 6 \cdot (-1) + 4 = -2$ → Maximum, da $f''(x_2) < 0$

Extrempunkte angeben

$E_1\left(-\frac{1}{3}/-\frac{4}{27}\right)$ und $E_2(-1/0)$

8. Wendepunkte

Bestimmung der Wendestellen

$$f''(x) = 0$$
$$6x + 4 = 0$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

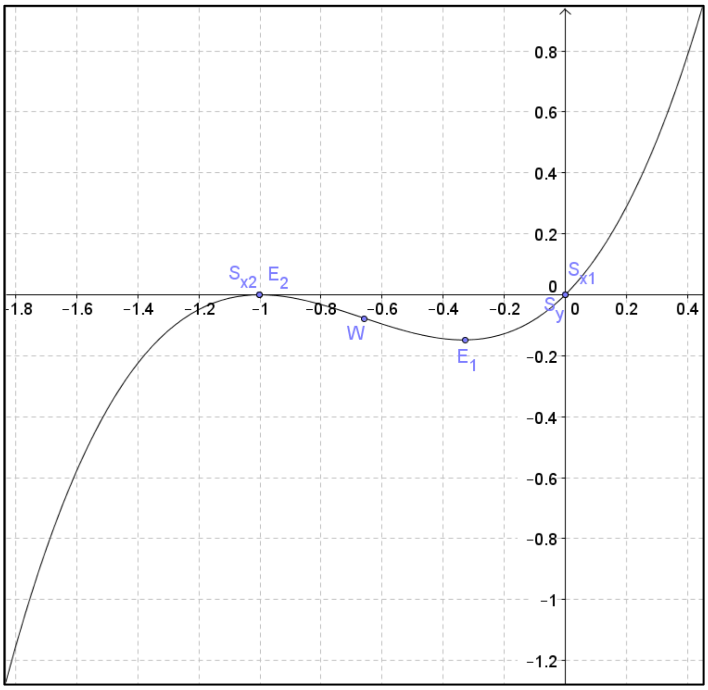
Überprüfung der Wendestellen mit $f'''(x) = 6$

$f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \neq 0$ → Es ist eine Wendestelle

Wendepunkt angeben

$W\left(-\frac{2}{3}/-\frac{2}{27}\right)$

9. Graph zeichnen



10. Monotonie

Die Monotonie kann mittels der Extrempunkte angegeben werden.

Von $(-\infty; -1]$ ist die Funktion monoton steigend.

Von $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$ ist die Funktion monoton fallend.

Von $\left[-\frac{1}{3}; \infty\right)$ ist die Funktion monoton steigend.

Dies kann auch rechnerisch nachgewiesen werden:

$f'(x) > 0$ → Graph ist monoton steigend

$f'(x) < 0$ → Graph ist monoton fallend

11. Krümmung (Kurvenverhalten)

Das Krümmungs- oder Kurvenverhalten lässt sich mittels der Wendepunkte bestimmen.

Von $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$ beschreibt die Funktion eine Rechtskurve, ist also konkav gekrümmt.

Von $\left[-\frac{2}{3}; \infty\right)$ beschreibt die Funktion eine Linkskurve, ist also konvex gekrümmt.

Dies kann auch rechnerisch nachgewiesen werden:

$f''(x) < 0$ → Graph ist rechtsgekrümmt

$f''(x) > 0$ → Graph ist linksgekrümmt

5.4.5.2. Gebrochenrationale Funktion

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{x+1}}$$

0. Ableitungen

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{3x^2 \cdot (x+1) - x^3 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x^3 + 3x^2 - x^3}{(x+1)^2} = \boldsymbol{\frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}}$$

$$\boldsymbol{f''(x)} = \frac{(6x^2 + 6x) \cdot (x+1)^2 - (2x^3 + 3x^2) \cdot 2 \cdot (x+1) \cdot 1}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(6x^2 + 6x) \cdot (x+1) - (2x^3 + 3x^2) \cdot 2}{(x+1)^3} = \boldsymbol{\frac{2x^3 + 6x^2 + 6x}{(x+1)^3}}$$

$$\boldsymbol{f'''(x)} = \frac{(6x^2 + 12x + 6) \cdot (x+1)^3 - (2x^3 + 6x^2 + 6x) \cdot 3 \cdot (x+1)^2 \cdot 1}{(x+1)^6}$$

$$= \frac{(6x^2 + 12x + 6) \cdot (x+1) - (6x^3 + 18x^2 + 18x)}{(x+1)^4} = \boldsymbol{\frac{6}{(x+1)^4}}$$

1. Definitionsbereich, Wertebereich

DB: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

WB: $y \in \mathbb{R}$

2. Verhalten im positiven und negativen Unendlichen

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x+1}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{x+1}\right) = \infty$$

3. Verhalten an nicht definierten Stellen

Es wird das Verhalten an der Stelle $x = -1$ untersucht.

von rechts kommend:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1+\frac{1}{n}}\left(\frac{x^3}{x+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(-1+\frac{1}{n}\right)^3}{\left(-1+\frac{1}{n}\right)+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1+3\cdot(-1)^2\cdot\frac{1}{n}+3\cdot(-1)\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\frac{1}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1+\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{-n^3+3n^2-3n+1}{n^3}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-n^3+3n^2-3n+1)\cdot n}{n^3\cdot 1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^4+3n^3-3n^2+n}{n^3}\right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

von links kommend:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1-\frac{1}{n}}\left(\frac{x^3}{x+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(-1-\frac{1}{n}\right)^3}{\left(-1-\frac{1}{n}\right)+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1+3\cdot(-1)^2\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)+3\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)^2+\left(-\frac{1}{n}\right)^3}{-\frac{1}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1-\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{-\frac{1}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{-n^3-3n^2-3n-1}{n^3}\right)}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-n^3-3n^2-3n-1)\cdot n}{n^3\cdot(-1)}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^4-3n^3-3n^2-n}{-n^3}\right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

4. asymptotisches Verhalten

Polynomdivision:

$$(x^3+0x^2+0x+0) \div (x+1) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$
$$\begin{array}{l} \underline{x^3+1x^2} \\ \quad -1x^2+0x \\ \quad \underline{-1x^2-1x} \\ \qquad\qquad 1x+0 \\ \qquad\qquad \underline{1x+1} \\ \qquad\qquad\quad -1 \end{array}$$

Das asymptotische Verhalten der Funktion ist quadratisch. Die Asymptote lautet

$$a(x) = x^2 - x + 1$$

5. Symmetrie

Untersuchung, ob achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung

Dabei helfen zwei Formeln:

Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$

Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1}$$
$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)+1} = \frac{-x^3}{-x+1}$$
$$-f(-x) = -\left[\frac{-x^3}{-x+1}\right] = \frac{x^3}{-x+1}$$

Wie zu erkennen ist, gilt

$$f(x) \neq f(-x) \quad \text{und} \quad f(x) \neq -f(-x)$$

und damit ist nachgewiesen, dass die Funktion weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

6. Schnittpunkte mit den Achsen

Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen):

$$f(x) = 0$$
$$\frac{x^3}{x+1} = 0$$
$$x^3 = 0$$
$$x = 0$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse liegt bei $S_x(0/0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$x = 0$$
$$f(0) = \frac{0^3}{0+1}$$
$$f(0) = 0$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0/0)$.

7. Extrema und Art der Extrema

Bestimmung der Extrema

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = 0$$
$$x^2 \cdot (2x+3) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -\frac{3}{2}$$

Art der Extrema ermitteln mit $f''(x) = \frac{2x^3+6x^2+6x}{(x+1)^3}$

$f''(x_1) = f''(0) = 0$ → Sattelpunkt, da $f''(x_1) = 0$

$f''(x_2) = f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 18$ → Minimum, da $f''(x_2) > 0$

Extrempunkt angeben

$E\left(-\frac{3}{2} / \frac{27}{4}\right)$

8. Wendepunkte

Bestimmung der Wendestellen

$$f''(x) = 0$$
$$\frac{2x^3 + 6x^2 + 6x}{(x+1)^3} = 0$$
$$2x \cdot (x^2 + 3x + 3) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_{2/3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 3} = n.l.$$

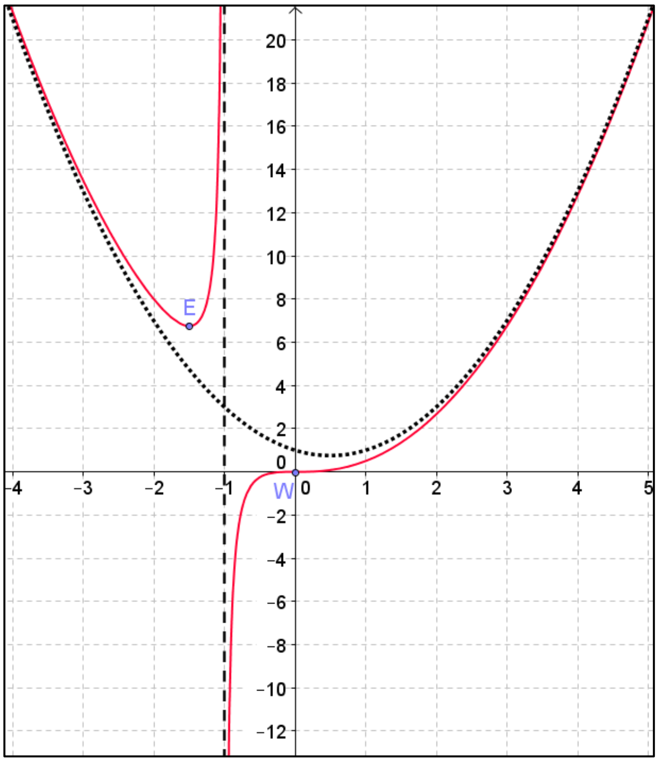
Überprüfung der Wendestellen mit $f'''(x) = \frac{6}{(x+1)^4}$

$f'''(0) = 6 \neq 0$ → Es ist eine Wendestelle.

Wendepunkt angeben

$W(0/0)$

9. Graph zeichnen



10. Monotonie

Die Monotonie kann mittels der Extrempunkte angegeben werden.

Von $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$ ist die Funktion monoton fallend.

Von $\left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; \infty)$ ist die Funktion monoton steigend.

Dies kann auch rechnerisch nachgewiesen werden:

$f'(x) > 0$ → Graph ist monoton steigend

$f'(x) < 0$ → Graph ist monoton fallend

11. Krümmung (Kurvenverhalten)

Das Krümmungs- oder Kurvenverhalten lässt sich mittels der Wendepunkte bestimmen.

Von $(-\infty; -1)$ beschreibt die Funktion eine Linkskurve, ist also konvex gekrümmt.

Von $(-1; 0]$ beschreibt die Funktion eine Rechtskurve, ist also konkav gekrümmt.

Von $(0; \infty)$ beschreibt die Funktion eine Linkskurve, ist also konvex gekrümmt.

Dies kann auch rechnerisch nachgewiesen werden:

$f''(x) < 0$ → Graph ist rechtsgekrümmt

$f''(x) > 0$ → Graph ist linksgekrümmt

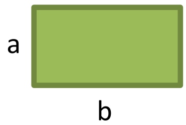
5.5. Extremwertaufgaben

Wie der Name schon sagt, handelt es sich um Aufgaben, die mittels der Differentialrechnung zu lösen sind. Meist wird eine sogenannte Zielfunktion verlangt, die nur noch von einer Variablen abhängig ist. Diese muss anschließend differenziert und der Extremwert bestimmt werden. Die Zielfunktion setzt sich meist aus einer oder mehreren Nebenbedingungen zusammen. Viele dieser Aufgaben haben ein hohes Anschauungsniveau.

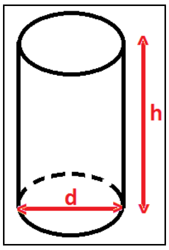
Schrittfolge zur Lösung einer Extremwertaufgabe:

1. Skizze!
2. Zielfunktion bestimmen (Was soll minimal oder maximal werden?)
3. Nebenbedingungen heraussuchen
4. Nebenbedingungen so umstellen, dass sie in die Zielfunktion eingesetzt werden können → Ergebnis: Zielfunktion sollte nur noch von einer Variablen abhängig sein!
5. Zielfunktion ableiten und Extremwert(e) bestimmen und überprüfen
6. Aufgabe noch einmal lesen und gegebenenfalls Lösung berechnen!

Beispiel 1:

0. Aufgabe	Ein Bauer hat 300 m Zaun gekauft. Er möchte daraus ein möglichst großes rechteckiges Gehege für seine Hühner bauen. Wie sind die Abmessungen der Seiten zu wählen? Berechne den Flächeninhalt des Geheges.
1. Skizze	
2. Zielfunktion	Flächeninhalt soll möglichst groß werden! $A(a,b) = a \cdot b$
3. Nebenbedingungen	Bauer hat Zaun zum Einzäunen gekauft $u = 300 = 2a + 2b$
4. Nebenbedingung umstellen	$a = 150 - b$ Einsetzen in Zielfunktion $A(b) = (150 - b) \cdot b = 150b - b^2$
5. Zielfunktion ableiten und Extremwert bestimmen/ überprüfen	$A'(b) = 150 - 2b$ $0 = 150 - 2b$ $b = 75$ Überprüfen: $A''(b) = -2$ $A''(75) = -2$ → $A''(b) < 0$ → Maximum
6. Aufgabe noch einmal lesen und Lösungen berechnen	$b = 75\,m$ $a = 150\,m - b = 75\,m$ $A = a \cdot b = 75\,m \cdot 75\,m = 5625\,m^2$

Beispiel 2:

0. Aufgabe	Es soll eine zylindrische Coladose hergestellt werden. Dafür soll möglichst wenig Material verbraucht werden. Der Inhalt der Coladose soll 330 ml sein. Wie müssen Höhe und Durchmesser gewählt werden?
1. Skizze	
2. Zielfunktion	Flächeninhalt soll möglichst groß werden! $A_O(d,h) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot d^2 \cdot \pi + \pi \cdot d \cdot h$
3. Nebenbedingungen	Inhalt: $V = 330\, ml = 0{,}33\, l = 0{,}33\, dm^3$ $V = 0{,}33 = \frac{1}{4} \cdot d^2 \cdot \pi \cdot h$
4. Nebenbedingung umstellen	$h = \frac{33}{25 \cdot d^2 \cdot \pi} = \frac{1{,}32}{d^2 \cdot \pi}$ Einsetzen in Zielfunktion $A_O(d) = \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \pi + \pi \cdot d \cdot \frac{1{,}32}{d^2 \cdot \pi}$ $= \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \pi + \frac{1{,}32}{d}$
5. Zielfunktion ableiten und Extremwert bestimmen/ überprüfen	$A_O'(d) = d \cdot \pi - \frac{1{,}32}{d^2}$ $0 = d \cdot \pi - \frac{1{,}32}{d^2}$ $\frac{1{,}32}{d^2} = \pi \cdot d$ $1{,}32 = \pi \cdot d^3$ $\sqrt[3]{\frac{1{,}32}{\pi}} = d \approx 0{,}75$ Überprüfen: $A''(d) = \pi + \frac{2{,}64}{d^3}$ $A''\left(\sqrt[3]{\frac{1{,}32}{\pi}}\right) = 3\pi$ → $A''(d) > 0$ → Minimum
6. Aufgabe noch einmal lesen und Lösungen berechnen	$d = 0{,}75\, dm = 7{,}5\, cm$ $h = \frac{1{,}32\, dm^3}{(0{,}75\, dm)^2 \cdot \pi} = 0{,}75\, dm = 7{,}5\, cm$ $A_O = \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \pi + \pi \cdot d \cdot h = 2{,}65\, dm^2$

5.6. Integralrechnung

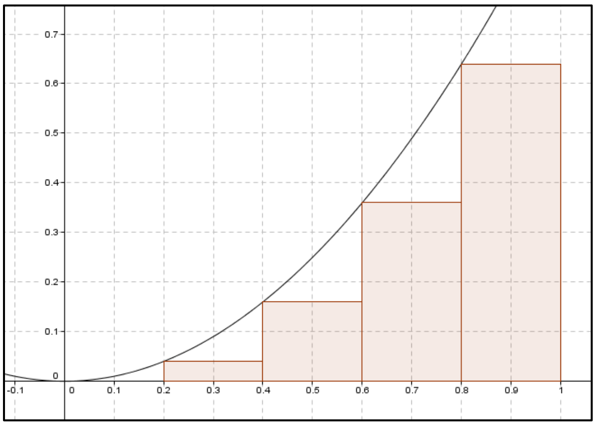
Die Integralrechnung wird meist dazu benutzt, Flächen unter bestimmten Kurven zu berechnen.

5.6.1. Obersumme/ Untersumme

Dies ist ein Hilfsmittel zur näherungsweisen Bestimmung der Fläche unterhalb einer Kurve. Dabei werden Kurvenabschnitte durch Rechtecke beschrieben und deren Flächeninhalt berechnet.

Beispiel 1:

Bildung der Untersumme von $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; 1]$ mit einer Schrittweite von $0{,}2$



Bei der Bildung der Untersumme ist darauf zu achten, dass die Rechtecke stets unterhalb der Funktion sind.

Berechnung:

$$[0; 0{,}2] \quad \rightarrow \quad A_1 = f\left(0 \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot 0{,}2 = 0$$

$$[0{,}2; 0{,}4] \quad \rightarrow \quad A_2 = f\left(1 \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot 0{,}2 = 0{,}008$$

$$[0{,}4; 0{,}6] \quad \rightarrow \quad A_3 = f\left(2 \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot 0{,}2 = 0{,}032$$

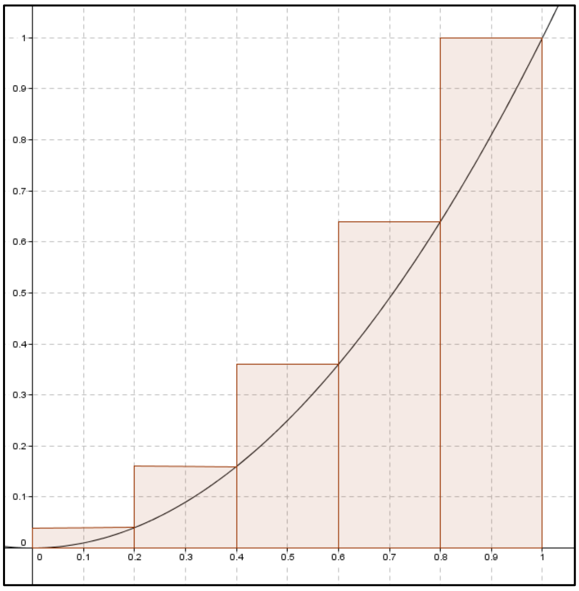
$$[0{,}6; 0{,}8] \quad \rightarrow \quad A_4 = f\left(3 \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot 0{,}2 = 0{,}072$$

$$[0{,}8; 1] \quad \rightarrow \quad A_5 = f\left(4 \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot 0{,}2 = 0{,}128$$

$$A_{U_{ges}} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0{,}24$$

Beispiel 2:

Bildung der Obersumme von $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; 1]$ mit einer Schrittweite von $0{,}2$



Bei der Bildung der Obersumme ist darauf zu achten, dass die Rechtecke stets oberhalb der Funktion sind.

Berechnung:

$$[0; 0{,}2] \quad \rightarrow \quad A_1 = f(0{,}2) \cdot 0{,}2 = 0{,}008$$
$$[0{,}2; 0{,}4] \quad \rightarrow \quad A_2 = f(0{,}4) \cdot 0{,}2 = 0{,}032$$
$$[0{,}4; 0{,}6] \quad \rightarrow \quad A_3 = f(0{,}6) \cdot 0{,}2 = 0{,}072$$
$$[0{,}6; 0{,}8] \quad \rightarrow \quad A_4 = f(0{,}8) \cdot 0{,}2 = 0{,}128$$
$$[0{,}8; 1] \quad \rightarrow \quad A_5 = f(1) \cdot 0{,}2 = 0{,}2$$

$$A_{O_{ges}} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0{,}44$$

Eine Annäherung an den tatsächlichen Flächeninhalt kann durch eine Grenzwertbetrachtung erreicht werden. Exemplarisch soll hier die Untersummenbildung dargestellt werden, für die Obersummenbildung gilt es analog.
Bildung der Untersumme, wenn $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; 1]$ in n gleichgroße Teile zerlegt wird:
In Beispiel 1 wurde die Untersumme exemplarisch für 5 gleich große Teile berechnet.
Verallgemeinert man dieses Vorgehen auf n gleich große Teile, so ergibt sich:

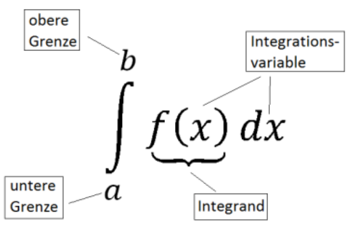
$$\left[0;\frac{1}{n}\right] \Rightarrow A_1 = f\left(0\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$\left[\frac{1}{n};\frac{2}{n}\right] \Rightarrow A_2 = f\left(1\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$\left[\frac{2}{n};\frac{3}{n}\right] \Rightarrow A_3 = f\left(2\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$\vdots$$
$$\left[\frac{n-1}{n};\frac{n}{n}\right] \Rightarrow A_n = f\left((n-1)\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
A_{U_{ges}} &= f\left(0\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + f\left(1\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + f\left(2\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \cdots + f\left((n-1)\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\left[f\left(0\cdot\frac{1}{n}\right) + f\left(1\cdot\frac{1}{n}\right) + f\left(2\cdot\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left((n-1)\cdot\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\cdot\left[\frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right] \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\left[\underbrace{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}_{\text{Summe der Quadratzahlen}}\right] \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\left[\frac{(n-1)\cdot(n-1+1)\cdot(2\cdot(n-1)+1)}{6}\right] \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{6} = \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Summe der Quadratzahlen:
$$\sum_{i=1}^{n}(i^2) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

5.6.2. Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Im vorangegangen Abschnitt wurde die Ober- bzw. Untersumme einer Funktion gebildet und mittels Grenzwertbetrachtung die genaue Fläche ermittelt.
Der Mathematiker G.W. Leibniz führte dafür die Integralschreibweise ein.



(Gelesen: Das Integral von a nach b von $f(x)$ nach dx.)

<u>Beispiel:</u>

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Die untere und obere Grenze gibt hierbei das Intervall an, in dem die Fläche berechnet werden soll. Der Integrand ist die dafür zugrunde liegende Funktion.

Für das bestimmte Integral gelten einige „Rechenregeln“:

- Sonderfälle

  $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

  $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

- Linearität

  $$\int_a^b (f \pm g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

  $$\int_a^b k \cdot f(x)\ \,dx = k \cdot \int_a^b f(x)$$

- Monotonieeigenschaft

  Wenn für alle $x \in [a;b]$ gilt, dass $f(x) < g(x)$, dann

  $$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

- Integrierbarkeit im Teilintervall

  Ist $c \in [a;b]$, so gilt:

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Der Unterschied zwischen dem bestimmten und den unbestimmten Integral sind die Grenzen. Während das bestimmte Integral eine obere und eine untere Grenze besitzt – also eine ganz bestimmte Fläche einschließt –, besitzt das unbestimmte Integral keine Grenzen und dient lediglich der Bestimmung der zugehörigen Stammfunktion.

5.6.3.Integralfunktion, Stammfunktion und Hauptsatz

Die in Abschnitt 5.6.1. beschriebene Methode zur Bestimmung der Fläche unter einer Kurve kann verallgemeinert werden.

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + 5$ und das Intervall $[0; b]$. Es soll die Fläche unterhalb der Kurve berechnet werden. Das Intervall soll dabei in n gleichgroße Teile zerlegt werden. Jeder Abschnitt ist demnach $\frac{b}{n}$ groß.

$$\begin{aligned}
&\left[0; \frac{b}{n}\right] \Rightarrow A_1 = f\left(0 \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} \\
&\left[\frac{b}{n}; \frac{2b}{n}\right] \Rightarrow A_2 = f\left(1 \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} \\
&\left[\frac{2b}{n}; \frac{3b}{n}\right] \Rightarrow A_3 = f\left(2 \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} \\
&\dots \\
&\left[\frac{(n-1) \cdot b}{n}; \frac{n \cdot b}{n}\right] \Rightarrow A_n = f\left((n-1) \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{U_{ges}} &= A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n \\
&= f\left(0 \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} + f\left(1 \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} + f\left(2 \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} + \cdots + f\left((n-1) \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} \\
&= \frac{b}{n} \cdot \left[\left(0 \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + 5 + \left(1 \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + 5 + \left(2 \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + 5 + \cdots + \left((n-1) \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + 5\right] \\
&= \frac{b}{n} \cdot \left[5 + \frac{1^2 b^2}{n^2} + 5 + \frac{2^2 b^2}{n^2} + 5 + \cdots + \frac{(n-1)^2 b^2}{n^2} + 5\right] \\
&= \frac{b}{n} \cdot \left[\underbrace{5 + 5 + 5 + \cdots + 5}_{n-mal}\right] + \frac{b}{n} \cdot \left[\frac{1^2 b^2}{n^2} + \frac{2^2 b^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2 b^2}{n^2}\right] \\
&= \frac{5 \cdot n \cdot b}{n} + \frac{b^3}{n^3} \cdot \left[\underbrace{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}_{Summe\ der\ Quadratzahlen}\right] \\
&= 5b + \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \\
&= 5b + \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} \\
&= 5b + \frac{b^3 \cdot (2n^2 - 3n + 1)}{6n^2} \\
&\xrightarrow[n \to \infty]{} 5b + \frac{1}{3} \cdot b^3
\end{aligned}$$

Damit wurde die Integralfunktion $f(x) = x^2 + 5$ zur unteren Grenze 0 gebildet. Dies kann verallgemeinert werden, indem die untere Grenze nicht immer 0 sein muss, sondern beliebig in einem bestimmten Intervall sein kann.

Begriffsklärung Integralfunktion:

> Die Funktion $f(t)$ sei in einem Intervall I stetig und es gilt $a \in I$. Dann heißt die Funktion
> $$J_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$
> für $x \in I$ Integralfunktion von $f(t)$ zur unteren Grenze a.

Ausgehend vom Begriff der Integralfunktion kann der Begriff Stammfunktion gebildet werden.

Begriffsklärung Stammfunktion:

Sei f eine auf einem Intervall I definierte Funktion. Dann heißt die Funktion F Stammfunktion von f im Intervall I, wenn für alle $x \in I$ gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Das bedeutet, dass es zu einer Funktion f mehrere Stammfunktionen F geben kann, die sich lediglich in einer additiven Konstante unterscheiden.

Beispiel:
Zur Funktion $f(x) = x^2$ gibt es die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, aber auch $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4$ oder $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2013$.
Allgemein können alle Stammfunktionen von $f(x) = x^2$ angegeben werden mit $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$, wobei c die additive Konstante ist.
Um aus der Stammfunktion das bestimmte Integral zu berechnen, benötigt man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Sei eine Funktion f auf einem Intervall I stetig. Weiterhin sei F die Stammfunktion von f in I. Dann gilt für $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel:
Berechnung des bestimmten Integrals der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; 1]$:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

5.6.4. Integrationsregeln

Mit Hilfe der vorgestellten Methode lassen sich Regeln zur Bestimmung der Stammfunktion herleiten. In Abschnitt 5.6.2 wurden auch schon Regeln vorgestellt.

Name	Regel	Beispiel
Potenzregel	$f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$\int (x^{1/2}) dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{1+\frac{1}{2}}$ $= \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$ $= \frac{2}{3} \cdot \sqrt[2]{x^3}$
Partielle Integration	wird verwendet, wenn die Funktion f aus einem Produkt besteht: $\int (u \cdot v')dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v)dx$	$\int x \cdot \sin(x)\, dx$ $\boxed{\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin(x) & v = -\cos(x) \end{matrix}}$ $F(x) = x \cdot (-\cos(x)) - \int (1 \cdot sin(x))dx$ $= -x \cdot \cos(x) - (-\cos(x))$ $= \cos(x) \cdot (-x+1)$
Lineare Substitution	wird verwendet, wenn man eine lineare innere Funktion hat: $\int f(x)dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t)dt$ mit $x = g(t)$ und $dx = g'(t)dt$	$\int (5x+4)^{2013} dx$ $\boxed{\begin{matrix} 5x+4=t \\ x = \frac{t}{5} - \frac{4}{5} \\ dx = \frac{1}{5} dt \end{matrix}}$ $\int t^{2013} \cdot \frac{1}{5}\, dt = \frac{1}{5 \cdot 2014} \cdot t^{2014}$ $= \frac{1}{10070} \cdot (5x+4)^{2014}$

5.6.5.Grundintegrale und spezielle Integrale

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
$f(x) = x^{-1}$	$F(x) = \ln\vert x\vert$	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x \cdot \ln\vert x\vert - x$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$F(x) = -\ln\vert\cos(x)\vert$	$f(x) = (ax+b)^n$	$F(x) = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)}$

5.6.6. Spezialfälle der Flächenberechnung

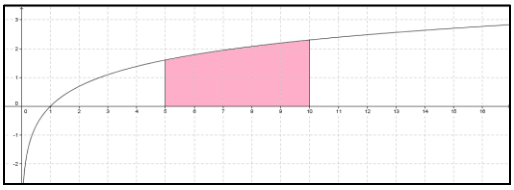
Bei der Flächenberechnung treten häufig – in Abhängigkeit der Aufgabe – folgende Spezialfälle auf.

5.6.6.1. Flächen oberhalb der x-Achse

Dieser „Spezialfall" wurde in Kapitel 5.6. behandelt. Es handelt sich um Flächen, die komplett oberhalb der x-Achse liegen.

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln(x)$ mit $x < 0$. Es soll der Flächeninhalt der Funktion im Intervall $[5; 10]$ mittels Integralrechnung bestimmt werden.

Skizze:



Berechnung:

$$\int_5^{10} \ln(x)\ dx = [x \cdot \ln|x| - x]_5^{10}$$
$$= (10 \cdot \ln(10) - 10) - (5 \cdot \ln(5) - 5)$$
$$= 5 \cdot \ln(20) - 5$$
$$\approx 9{,}98$$

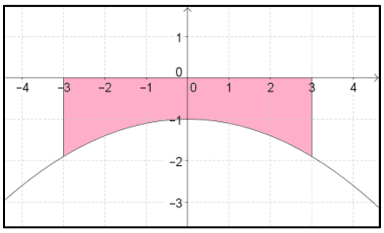
Der Flächeninhalt, den die Funktion $f(x) = \ln(x)$ im Intervall $[5; 10]$ mit der x-Achse einschließt, beträgt 9,98 FE.

5.6.6.2. Flächen unterhalb der x-Achse

Bei diesem Spezialfall handelt es sich um Flächen, die komplett unterhalb der x-Achse liegen. Das interessante an diesem Fall ist, dass die Flächen negativ werden, also der Betrag zum Schluss noch gebildet werden muss, wenn es um Flächenberechnung geht.

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = -0{,}1x^2 - 1$. Es soll die Fläche im Intervall $[-3; 3]$ bestimmt werden.

Skizze:



Berechnung:

$$\int_{-3}^{3} (-0{,}1x^2 - 1)dx = \left[\frac{-0{,}1}{3}x^3 - x\right]_{-3}^{3}$$
$$= \left(\frac{-0{,}1}{3} \cdot 3^3 - 3\right) - \left(\frac{-0{,}1}{3} \cdot (-3)^3 - (-3)\right)$$
$$= -7{,}8$$

Der Flächeninhalt, den die Funktion $f(x) = -0{,}1x^2 - 1$ im Intervall $[-3; 3]$ mit der x-Achse einschließt, beträgt 7,8 FE.

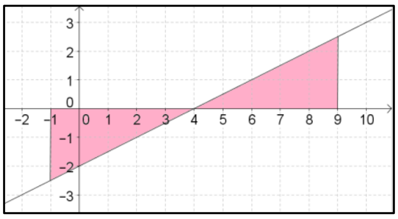
5.6.6.3. Flächen, die sowohl oberhalb als auch unterhalb der x-Achse liegen

Bei diesem Spezialfall ist es wichtig, vorher die Nullstellen zu bestimmen, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$. Im Intervall $[-1; 9]$ soll der Flächeninhalt berechnet werden.

Skizze:



Berechnung Integral:

$$\int_{-1}^{9} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - 2x\right]_{-1}^{9}$$
$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 9^2 - 2 \cdot 9\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1)\right)$$
$$= 0$$

Berechnung Flächeninhalt:

$$\int_{-1}^{9} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx$$
$$= \int_{-1}^{4} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx + \int_{4}^{9} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^2 - 2x\right]_{-1}^{4} + \left[\frac{1}{4}x^2 - 2x\right]_{4}^{9}$$
$$= \left|\left(\frac{1}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1)\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4} \cdot 9^2 - 2 \cdot 9\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (4)^2 - 2 \cdot (4)\right)\right|$$
$$= \left|-\frac{25}{4}\right| + \left|\frac{25}{4}\right| = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

Der Flächeninhalt, den die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ im Intervall $[-1; 9]$ mit der x-Achse einschließt, beträgt $12{,}5\ FE$.

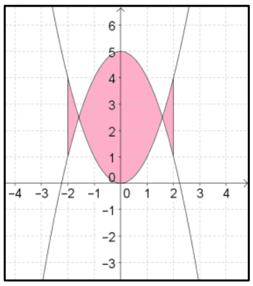
5.6.6.4. Flächen zwischen zwei Funktionen

Bei diesem Spezialfall müssen zunächst die Schnittpunkte der beiden Funktionen ermittelt werden. Anschließend kann mittels Intervalladditivität die Fläche berechnet werden.

Beispiel:

Gegeben sind die zwei Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 5$. Im Intervall $[-2; 2]$ soll der Flächeninhalt berechnet werden, den beide Funktionen einschließen.

Skizze:



Berechnung:

1. Schnittstellen bestimmen:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = -x^2 + 5$$
$$2x^2 = 5$$
$$x^2 = \frac{5}{2}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

2. Fläche berechnen:

$$\int_{-2}^{2} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-2}^{2} (2x^2 - 5)dx$$
$$= \int_{-2}^{-\sqrt{\frac{5}{2}}} (2x^2 - 5)dx + \int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} (2x^2 - 5)dx + \int_{\sqrt{\frac{5}{2}}}^{2} (2x^2 - 5)dx$$
$$= \left|\frac{5 \cdot \sqrt{10} - 14}{3}\right| + \left|\frac{-10 \cdot \sqrt{10}}{3}\right| + \left|\frac{5 \cdot \sqrt{10} - 14}{3}\right|$$
$$= \frac{20 \cdot \sqrt{10} - 28}{3} \approx 11{,}75$$

Der Flächeninhalt, den die beiden Funktion $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[-2; 2]$ gemeinsam einschließen, beträgt $11{,}75\ FE$.