4. Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem ist ein System aus n Gleichungen mit m Unbekannten, die nur linear vorkommen.

$$\begin{gathered}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \cdots + a_{1m} \cdot x_m = b_1 \\
a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \cdots + a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + a_{n3} \cdot x_3 + \cdots + a_{nm} \cdot x_m = b_n
\end{gathered}$$

Dieses kann abkürzend auch in Matrizenschreibweise[1] notiert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\vec{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{\boldsymbol{b}}}$$

Dabei ist die Matrix A die Koeffizientenmatrix, der Vektor $\vec{x}$ die gesuchte Lösung des Gleichungssystems und der Vektor $\vec{b}$ der Lösungsvektor.
Beispiel:

$$\begin{aligned} -8x + 7y &= 29 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4.1. Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme

Aus der Schule sind 3 Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme bekannt, das Einsetzungsverfahren, das Gleichsetzungsverfahren und das Additionsverfahren.

4.1.1. Das Einsetzungsverfahren

Vorgehen:
1. Eine Gleichung wird nach einer Unbekannten umgestellt.
2. Anschließend wird die Unbekannte durch diesen Term in allen anderen Gleichungen ersetzt.
3. Wiederhole Schritt 1 und 2 solange, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig ist.
4. Lösungsmenge angeben

Beispiel:

$$\begin{aligned} I\colon \quad -8x + 7y &= 29 \\ II\colon \quad 2x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Gleichung II nach x auflösen: $x = 2 - y$ und in Gleichung I einsetzen:

$$\begin{aligned} -8 \cdot (2 - y) + 7y &= 29 \\ -16 + 8y + 7y &= 29 \\ 15y &= 45 \\ y &= 3 \\ x &= 2 - y = 2 - 3 = -1 \end{aligned}$$

$L = \{(-1; 3)\}$

[1] Anordnung von Zahlenwerten in Tabellenform (http://de.wikipedia.org/wiki/Matrix)

4.1.2. Das Gleichsetzungsverfahren

Dieses Verfahren ist das Standardverfahren, um Schnittpunkte von zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ zu ermitteln.

Vorgehen:
1. Alle Gleichungen nach einer Variablen umstellen
2. Gleichungen gleichsetzen und berechnen
3. Lösungsmenge angeben

Beispiel:

$$\begin{aligned} I:&\quad -8x + 7y = 29 \\ II:&\quad 2x + 2y = 4 \end{aligned}$$

beide Gleichungen werden nach x umgestellt:

$$\begin{aligned} I:&\quad x = -\frac{29 - 7y}{8} \\ II:&\quad x = 2 - y \end{aligned}$$

und anschließend gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} -\frac{29 - 7y}{8} &= 2 - y \\ -(29 - 7y) &= 8 \cdot (2 - y) \\ -29 + 7y &= 16 - 8y \\ 15y &= 45 \\ y &= 3 \\ x &= 2 - y = 2 - 3 = -1 \end{aligned}$$

$L = \{(-1; 3)\}$

4.1.3. Das Additionsverfahren

Bei diesem Verfahren wird versucht durch Addition bzw. Subtraktion von Zeilen das Gleichungssystem auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zu reduzieren.
Auch das sog. Gauß-Verfahren[2] basiert auf diesem Additionsverfahren!

Vorgehen:
1. Bilde das kleinste gemeinsame Vielfache von Koeffizienten derselben Unbekannten
2. Multipliziere die gesamte Gleichung so, dass das kgV gebildet wird
3. Addiere oder subtrahiere beide Gleichungen, sodass eine neue Gleichung entsteht
4. Wiederhole Schritt 1 bis 3 solange, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig ist.
5. Lösungsmenge angeben

Beispiel:

$$\begin{aligned} I:&\quad -8x + 7y = 29 \\ II:&\quad 2x + 2y = 4 \end{aligned}$$

Wahl der Unbekannten: x

Multiplikation der Gleichung II mit 4 ergibt:

$$\begin{aligned} I:&\quad -8x + 7y = 29 \\ II' = 4 \cdot II:&\quad 8x + 8y = 16 \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} I + II':&\quad 0x + 15y = 45 \\ &\quad y = 3 \end{aligned}$$

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Gaußsches_Eliminationsverfahren

Zum Berechnen von x wird y in I oder II eingesetzt:

$$2x + 2 \cdot 3 = 4$$
$$x = -1$$

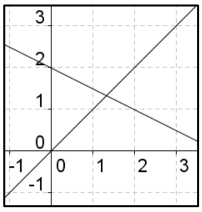
$L = \{(-1; 3)\}$

4.2. Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

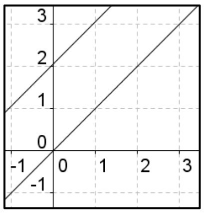
Für die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen gibt es 3 Fälle:

- Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.
- Das Gleichungssystem hat gar keine Lösung.
- Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

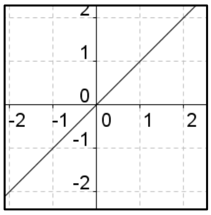
Dies kann man sich für den 2-dimensionalen Fall (ein Gleichungssystem bestehend aus mind. 2 Gleichungen und genau 2 Unbekannten) bildlich veranschaulichen, indem die Gleichungen des Gleichungssystems als Geradengleichungen aufgefasst werden.



Hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, so schneiden sich die beiden Geraden in genau einem Punkt.



Hat das Gleichungssystem gar keine Lösung, so liegen die beiden Geraden parallel zueinander.



Hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, so schneiden sich die beiden Geraden in allen Punkten, sind also identisch.

Um die Lösbarkeit für Gleichungssysteme nachzuweisen, wird der Rang einer Matrix bzw. die Determinante einer Matrix benutzt. Es gilt:

- $rg(A) = rg(A|b)$ → das lineare Gleichungssystem ist lösbar (es kann genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen)
- $rg(A) = rg(A|b) = \#Unbekannte$ → das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar (besitzt also genau eine Lösung)
- $\det(A) \neq 0$ → das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar (besitzt also genau eine Lösung)
- $\det(A) = 0$ → das lineare Gleichungssystem hat entweder gar keine oder unendlich viele Lösungen
  - Nebendeterminaten[3] prüfen
  - Sind alle Nebendeterminanten 0, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
  - Sind nicht alle Nebendeterminanten 0, so hat das lineare Gleichungssystem gar keine Lösung.

[3] Jede Spalte von A wird nacheinander durch $\vec{b}$ ersetzt und die jeweilige Determinante berechnet.

Exkurs: Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix bestimmt sich mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens bzw. des Additionsverfahrens, bei dem die Matrix auf obere Dreiecksgestalt umgeformt wird. Der Rang $rg(A)$ ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen[4], also die Anzahl der Zeilen, die $\neq 0$ sind.

Beispiel 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[III'=2\cdot I-III]{II'=4\cdot I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 11 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{III''=2\cdot II+3\cdot III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 46 \end{pmatrix}$$
$$rg(A) = 3$$

Beispiel 2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 24 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[III'=2\cdot I-III]{II'=4\cdot I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{III''=2\cdot II+3\cdot III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$rg(B) = 2$$

Beispiel 3:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 24 \\ 2 & 2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[III'=2\cdot I-III]{II'=4\cdot I-II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$rg(C) = 1$$

Exkurs: Determinante einer Matrix

Eine Determinante ist eine nach einem bestimmten Schema berechenbare Zahl, die sich aus einer quadratischen Matrix ergibt. Sie gibt z.B. Auskunft über die Lösbarkeit von Gleichungssystemen.

Vorgehen:

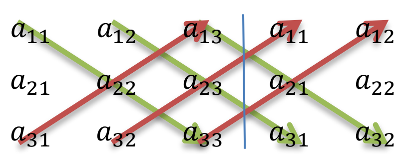
- 2×2-Matrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

- 3×3-Matrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Berechnung nach der Regel von Saruss:



Dabei werden rechts neben die Matrix die ersten zwei Spalten derselben Matrix erneut notiert. Anschließend werden, wie im Schema dargestellt, die grünen Pfeile addiert und die roten Pfeile subtrahiert. Dabei werden die Elemente jeden Pfeils miteinander multipliziert.

[4] Das sind die Zeilen, die keine Vielfachen voneinander sind.

- $n \times n$-Matrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

  Mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace kann die gegebene Matrix auf 2×2 oder 3×3 reduziert werden. Anschließend wird die Determinante wie oben beschrieben bestimmt.

  Entwicklungssatz von Laplace: (Entwicklung nach der j-ten Spalte)

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det(A_{kj})\right)$$

  wobei A_{kj} die Matrix ist, die durch Streichen der k-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht

<u>Beispiel 1:</u>

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

<u>Beispiel 2:</u>

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

<u>Beispiel 3:</u>

<u>Entwicklung nach **1**. Spalte:</u>

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+\mathbf{1}} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+\mathbf{1}} \cdot 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+\mathbf{1}} \cdot 7 \cdot \det\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + 7 \cdot \det\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -38 - 4 \cdot (-6) + 7 \cdot (39) \\ &= 259 \end{aligned}$$

Wie leicht zu erkennen ist, kann durch Umformen der Matrix eine Vereinfachung der Berechnung der Determinante erfolgen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[III'=7\cdot I-III]{II'=4\cdot I-II} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 0 & 31 & 6 \\ 0 & 55 & 19 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+\mathbf{1}} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 31 & 6 \\ 55 & 19 \end{pmatrix} + \underbrace{(-1)^{2+\mathbf{1}} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 55 & 19 \end{pmatrix}}_{=0} + \underbrace{(-1)^{3+\mathbf{1}} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 31 & 6 \end{pmatrix}}_{=0}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 31 & 6 \\ 55 & 19 \end{pmatrix}$$

$$= 31 \cdot 19 - 55 \cdot 6 = 259$$

Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme – Beispiele

Beispiel 1:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

mit Rang	mit Determinante
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 5 & 0 & 3 & -5 \\ 8 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -8 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } \substack{II'=8\cdot I-5\cdot II \\ III'=2\cdot I-5\cdot III}}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 5 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & -15 & 19 & -45 \\ 0 & 10 & 16 & 30 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } III'' = 2\cdot II' + 3\cdot III'}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 5 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & -15 & 19 & -45 \\ 0 & 0 & 86 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow rg(A) = 3 = rg(A\|b) = \#Unbekannte$ → LGS ist eindeutig lösbar	$\det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $= 5\cdot 3\cdot(-2) + 0\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 8\cdot(-2)$ $\quad -2\cdot 3\cdot 3 - (-2)\cdot 1\cdot 5 - (-2)\cdot 8\cdot 0$ $= -30 + 0 - 48 - 18 + 10 + 0$ $= -86$ $\Rightarrow \det(A) \neq 0$ → LGS ist eindeutig lösbar

Beispiel 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 24 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Rang	mit Determinante
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 24 & -5 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } {\scriptstyle II'=4\cdot I-II \atop III'=2\cdot I-III}}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & 13 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } III'' = 2 \cdot II' + 3 \cdot III'}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{array}\right)$ $\Rightarrow rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A\|b)$ → LGS hat keine Lösung	$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 24 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $= 1 \cdot 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 24 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot (-2)$ $-2 \cdot 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 24 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 \cdot 0$ $= -6 + 0 - 24 - 18 + 48 + 0$ $= 0$ $\Rightarrow \det(A) = 0$ → LGS hat keine oder unendlich viele Lösungen → Nebendeterminanten prüfen $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 24 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 105$ $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 24 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 140$ $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -35$ → es sind nicht alle Nebendeterminanten 0 → das LGS hat keine Lösung

Beispiel 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 24 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 16 \end{pmatrix}$$

mit Rang	mit Determinante
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 24 & -10 \\ 2 & -2 & -2 & 16 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } \substack{II'=4\cdot I-II \\ III'=2\cdot I-III}}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & 18 \\ 0 & 2 & 8 & -12 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } III'' = 2\cdot II' + 3\cdot III'}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow rg(A) = 2 = rg(A\|b) \neq \#Unbekannte$ → LGS hat unendlich viele Lösungen	$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 24 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $= 1\cdot 3\cdot(-2) + 0\cdot 24\cdot 2 + 3\cdot 4\cdot(-2)$ $-2\cdot 3\cdot 3 - (-2)\cdot 24\cdot 1 - (-2)\cdot 4\cdot 0$ $= -6 + 0 - 24 - 18 + 48 + 0$ $= 0$ $\Rightarrow \det(A) = 0$ → LGS hat keine oder unendlich viele Lösungen → Nebendeterminanten prüfen $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -10 & 3 & 24 \\ 16 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 0$ $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -10 & 24 \\ 2 & 16 & -2 \end{pmatrix} = 0$ $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -10 \\ 2 & -2 & 16 \end{pmatrix} = 0$ → es sind alle Nebendeterminanten 0 → das LGS hat unendlich viele Lösungen

Übung:

Überprüfen Sie die Lösbarkeit der linearen Gleichungssysteme mittels Rang einer Matrix und Determinante. Berechnen Sie gegebenenfalls die Lösung!

a) $$\begin{vmatrix} -1-5x=6y \\ x-5y=6 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 4x+2y=8 \\ 3y=12-6x \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} y=3x-5 \\ 6x=2y-10 \end{vmatrix}$$

d) $$\begin{vmatrix} x+y+z=8 \\ 2x-y-z=-5 \\ 10x+y+5z=5 \end{vmatrix}$$

e) $$\begin{vmatrix} x+y+z=4 \\ x-3y-2z=23 \\ 2x-2y-z=27 \end{vmatrix}$$

f) $$\begin{vmatrix} -x+y-z=9 \\ 3x-y+5z=-3 \\ 2x+y+5z=20 \end{vmatrix}$$

g) $$\begin{vmatrix} 3w-2x-4y+5z=-17 \\ w+x+2y-z=6 \\ 8w+3x+z=1 \\ -x-y=-5 \end{vmatrix}$$

h) $$\begin{vmatrix} w+x+y+z=5 \\ 2w+4x-y-z=6 \\ 4w+6x+y+z=16 \\ w+3x-2y-2z=1 \end{vmatrix}$$

i) $$\begin{vmatrix} w+x+y+z=-1 \\ 2w+x-y+3z=9 \\ 4w+2x+2y+5z=5 \\ 2w+x+3y+2z=-5 \end{vmatrix}$$

Lösung:

a) $\begin{vmatrix} -1-5x=6y \\ x-5y=6 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Rang	Determinante
$\left(\begin{array}{cc\|c} -5 & -6 & 1 \\ 1 & -5 & 6 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } II' = I + 5 \cdot II}$ $\left(\begin{array}{cc\|c} -5 & -6 & 1 \\ 0 & -31 & 31 \end{array}\right)$ $\Rightarrow rg(A) = 2 = rg(A\|b) = \#Unbekannte$ → LGS eindeutig lösbar	$\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-5) - 1 \cdot (-6) = 26$ $\Rightarrow \det(A) \neq 0$ → LGS eindeutig lösbar
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	

b) $\begin{vmatrix} 4x+2y=8 \\ 3y=12-6x \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

Rang	Determinante
$\left(\begin{array}{cc\|c} 4 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 12 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } II' = 3 \cdot I - 2 \cdot II}$ $\left(\begin{array}{cc\|c} 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow rg(A) = 1 = rg(A\|b) \neq \#Unbekannte$ → LGS hat unendlich viele Lösungen	$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 0$ $\Rightarrow \det(A) = 0$ → Nebendeterminanten prüfen $\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$ $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 48 = 0$ → alle Nebendeterminanten sind 0 → LGS hat unendlich viele Lösungen
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0{,}5t \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$	

c) $\begin{vmatrix} y = 3x - 5 \\ 6x = 2y - 10 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

Rang	Determinante
$\left(\begin{array}{cc\|c} -3 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & -10 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } II' = 2 \cdot I + II}$ $\left(\begin{array}{cc\|c} -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -20 \end{array}\right)$ $\Rightarrow rg(A) = 1 \neq 2 = rg(A\|b)$ → LGS hat keine Lösung	$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$ $\Rightarrow \det(A) = 0$ → Nebendeterminanten prüfen $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = 10 - (-10) = 20$ $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} = 30 - (-30) = 60$ → alle Nebendeterminanten sind $\neq 0$ → LGS hat keine Lösung
$L = \emptyset$	

d) $\begin{vmatrix} x + y + z = 8 \\ 2x - y - z = -5 \\ 10x + y + 5z = 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Rang	Determinante
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \\ 10 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } {}^{II'=2\cdot I-II}_{III'=10\cdot I-III}}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 21 \\ 0 & 9 & 5 & 75 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } III'' = 3 \cdot II' - III'}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{array}\right)$ $\Rightarrow rg(A) = 3 = rg(A\|b)$ → LGS besitzt genau eine Lösung	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 10 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + (-10) + 2 - (-10) - (-1) - 10 = -12$ $\Rightarrow \det(A) \neq 0$ → LGS eindeutig lösbar
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$	

e) $\left|\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x-3y-2z=23 \\ 2x-2y-z=27 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \\ 27 \end{pmatrix}$

<table>
<tr><th>Rang</th><th>Determinante</th></tr>
<tr><td>

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 23 \\ 2 & -2 & -1 & 27 \end{array}\right)$

$\boxed{\text{Umformung:}\begin{smallmatrix} II'=I-II \\ III'=2\cdot I-III \end{smallmatrix}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & -19 \\ 0 & 4 & 3 & -19 \end{array}\right)$

$\boxed{\text{Umformung:}\, III'' = II' - III'}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow rg(A) = 2 = rg(A|b) \neq \#Unbekannte$

→ LGS besitzt unendlich viele Lösungen

</td><td>

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + (-4) + (-2)$

$-(-6) - 4 - (-1)$

$= 0$

$\Rightarrow \det(A) = 0$

→ Nebendeterminanten prüfen

$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 23 & -3 & -2 \\ 27 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 23 & -2 \\ 2 & 27 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 23 \\ 2 & -2 & 27 \end{vmatrix} = 0$

→ alle Nebendeterminanten sind 0
→ LGS hat unendlich viele Lösungen

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25t + 8{,}75 \\ -0{,}75t - 4{,}75 \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

</td></tr>
</table>

f) $\begin{vmatrix} -x+y-z=9 \\ 3x-y+5z=-3 \\ 2x+y+5z=20 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix}$

<table>
<tr><th>Rang</th><th>Determinante</th></tr>
<tr><td>
$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 9 \\ 3 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & 20 \end{array}\right)$
$\boxed{\text{Umformung:}^{II'=3\cdot I+II}_{III'=2\cdot I+III}}$
$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 24 \\ 0 & 3 & 3 & 38 \end{array}\right)$
$\boxed{\text{Umformung:} III'' = 2\cdot II' - 3\cdot III'}$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -66 \end{array}\right)$
$\Rightarrow rg(A) = 2 \neq 1 = rg(A|b)$
→ LGS besitzt keine Lösung
</td><td>
$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 10 + (-3)$
$-2-(-5)-15$
$= 0$
$\Rightarrow \det(A) = 0$
→ Nebendeterminanten prüfen
$\begin{vmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 20 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8$
$\begin{vmatrix} -1 & 9 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 2 & 20 & 5 \end{vmatrix} = 4$
$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 20 \end{vmatrix} = -4$
→ alle Nebendeterminanten sind $\neq 0$
→ LGS hat keine Lösung
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$L = \emptyset$</td></tr>
</table>

g) $\left|\begin{matrix} 3w-2x-4y+5z=-17 \\ w+x+2y-z=6 \\ 8w+3x+z=1 \\ -x-y=-5 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Rang	Determinante
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 3 & -2 & -4 & 5 & -17 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 8 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } \begin{matrix} II'=I-3\cdot II \\ III'=8\cdot I-3\cdot III \\ IV'=IV \end{matrix}}$ $\left(\begin{array}{cccc\|c} 3 & -2 & -4 & 5 & -17 \\ 0 & -5 & -10 & 8 & -35 \\ 0 & -25 & -32 & 37 & -139 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } \begin{matrix} III''=5\cdot II'-III' \\ IV''=II'-5\cdot IV' \end{matrix}}$ $\left(\begin{array}{cccc\|c} 3 & -2 & -4 & 5 & -17 \\ 0 & -5 & -10 & 8 & -35 \\ 0 & 0 & -18 & 3 & -36 \\ 0 & 0 & -5 & 8 & -10 \end{array}\right)$ $\boxed{\text{Umformung: } IV'''=5\cdot III''-18\cdot IV''}$ $\left(\begin{array}{cccc\|c} 3 & -2 & -4 & 5 & -17 \\ 0 & -5 & -10 & 8 & -35 \\ 0 & 0 & -18 & 3 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & -129 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow rg(A)=4=rg(A\|b)=\#Unbekannte$ → LGS besitzt genau eine Lösung	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\xrightarrow[\Rightarrow VZ \text{ ändert sich}]{\substack{Zeilentausch \\ I \text{ und } II}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & 5 \\ 8 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\boxed{\text{Umformung: } \begin{matrix} II'=II-3\cdot I \\ III'=III-8\cdot I \\ IV'=IV \end{matrix}}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & 8 \\ 0 & -5 & -16 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} -5 & -10 & 8 \\ -5 & -16 & 9 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 1\cdot(-43) = -43$ $\Rightarrow$ da Zeilentausch: $\det(A) = 43$ $\Rightarrow \det(A) \neq 0$ LGS besitzt genau eine Lösung
$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	

h) $\left|\begin{matrix} w+x+y+z=5 \\ 2w+4x-y-z=6 \\ 4w+6x+y+z=16 \\ w+3x-2y-2z=1 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}$

<table>
<tr><th>Rang</th><th>Determinante</th></tr>
<tr><td>

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\boxed{\text{Umformung: } \begin{matrix} II'=2\cdot I-II \\ III'=4\cdot I-III \\ IV'=I-IV \end{matrix}}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$

$\boxed{\text{Umformung:} \begin{matrix} III''=II'-III' \\ IV''=II'-IV' \end{matrix}}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow rg(A) = 2 = rg(A|b) \neq \#Unbekannte$

→ LGS besitzt unendlich viele Lösungen

</td><td>

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

$\boxed{\text{Umformung: } \begin{matrix} II'=2\cdot I-II \\ III'=4\cdot I-III \\ IV'=I-IV \end{matrix}}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

$= 0$

$\Rightarrow \det(A) = 0$

→ Nebendeterminanten prüfen

$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & -1 \\ 16 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & -1 \\ 4 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & -1 \\ 4 & 6 & 16 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

→ alle Nebendeterminanten sind 0

→ LGS besitzt unendlich viele Lösungen

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5s - 2{,}5t + 7 \\ 1{,}5s + 1{,}5t - 2 \\ s \\ t \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$

</td></tr>
</table>

i) $\left|\begin{matrix} w+x+y+z=-1 \\ 2w+x-y+3z=9 \\ 4w+2x+2y+5z=5 \\ 2w+x+3y+2z=-5 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

Rang	Determinante
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{array}\right)$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
$\boxed{\text{Umformung: } \begin{matrix} II'=2\cdot I-II \\ III'=4\cdot I-III \\ IV'=2\cdot I-IV \end{matrix}}$	$\boxed{\text{Umformung: } \begin{matrix} II'=2\cdot I-II \\ III'=4\cdot I-III \\ IV'=2\cdot I-IV \end{matrix}}$
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -11 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 0$ $\Rightarrow \det(A) = 0$
$\boxed{\text{Umformung: } \begin{matrix} III''=2\cdot II'-III' \\ IV''=II'-IV' \end{matrix}}$	→ Nebendeterminanten prüfen
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -14 \end{array}\right)$	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6$
$\boxed{\text{Umformung: } IV''' = III'' - IV''}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1$
$\Rightarrow rg(A) = 3 \neq 4 = rg(A\|b)$ → LGS besitzt keine Lösung	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 4$
	→ alle Nebendeterminanten sind $\neq 0$ → LGS besitzt keine Lösung
$L = \emptyset$	