# 3. Algebraische Grundlagen

## 3.1. Termumformungen

- Begriff Term: mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen, Rechenzeichen oder Klammern besteht
- Termumformungen dienen der Vereinfachung von komplexen Termen
- sind nützlich beim Lösen von Gleichungen

- Möglichkeiten:
  - Distributivgesetz: $\overset{\text{ausmultiplizieren}}{\underset{\text{ausklammern}}{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}}$
  - Auflösen von Minusklammern: $a - (b + c) = a - b - c$
    (↗ Verweis auf Kapitel 2)
  - Multiplikation von Summen: $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
    Jeder Summand der einen Summe muss mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert werden!

    Binomische Formeln: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
    $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
  - Zusammenfassen gleichartiger Terme
    Bsp.: $2x + 3y - 5x - 8y = -3x - 5y$
  - Anwenden von Potenzgesetzen, Wurzelgesetzen, Logarithmengesetzen
    (↗ Verweis auf Kapitel 2)

## 3.2. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Lineare Gleichungen bzw. Ungleichungen sind Gleichungen bzw. Ungleichungen mit einer Unbekannten (Variablen) der Form

$$ax + b \left\{\begin{matrix} < \\ > \\ = \\ \neq \\ \leq \\ \geq \end{matrix}\right\} 0$$

- **Hinweis**: Beim Dividieren durch bzw. beim Multiplizieren mit einer negativen Zahl, „dreht“ sich das Ungleichheitszeichen!

- Beispiel für Gleichung:

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 0 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Lösungsmenge der Gleichung $3x + 4 = 0$ ist $L = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

- Beispiel für Ungleichung:

$$\begin{aligned} -3x + 4 &> 0 \\ -3x &> -4 \\ x &< -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Lösungsmenge für Ungleichung $-3x + 4 > 0$ ist $L = \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$

## 3.3. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

Quadratische Gleichungen und Ungleichungen sind Gleichungen bzw. Ungleichungen mit einer Unbekannten (Variablen) der allgemeinen Form:

$$0 \begin{Bmatrix} < \\ > \\ = \\ \neq \\ \geq \\ \leq \end{Bmatrix} a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Zum Lösen einer solchen Gleichung bzw. Ungleichung wird die Lösungsformel herangezogen:

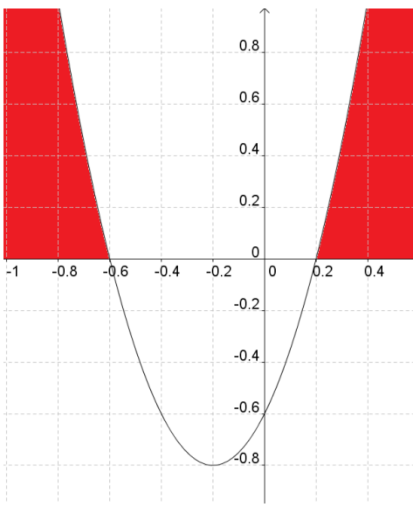
- allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$: $\quad x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- Normalform $x^2 + px + q = 0$: $\quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

- Beispiel für quadratische Ungleichung (die $y$-Werte sollen größer als 0 sein!):

$$\begin{aligned} 5x^2 + 2x - \frac{3}{5} &> 0 \\ x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25} &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{2}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{3}{25}} \\ &= -\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{3}{25}} \\ &= -\frac{1}{5} \pm \frac{2}{5} \\ x_1 &= \frac{1}{5} \\ x_2 &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$




Lösungsmenge $L = \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; \infty\right)$

## 3.4. Weitere Gleichungen

- Gleichungen höheren Grades
  - biquadratische Gleichungen $ax^4 + bx^2 + c = 0$
    Vorgehen:
    1. $x^2$ wird durch $z$ ersetzt
    2. und die daraus entstehende quadratische Gleichung gelöst
    3. die Lösungen $z_1$ und $z_2$ müssen zurücksubstituiert werden und man erhält $x_{1/2/3/4}$ als Lösung der Gleichung

    Beispiel:

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$$
$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$
$$x^2 = z$$
$$z^2 - 5z + 4 = 0$$
$$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}} = \pm 4$$
$$x_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} = \pm 1$$

  - Gleichungen dritten Grades

$$ax^3 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{-\frac{b}{a}}$$
$$ax^3 + bx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \;\wedge\; x_{2/3} = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$$
$$ax^3 + bx^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = 0 \;\wedge\; x_3 = -\frac{b}{a}$$
$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \;\wedge x_{2/3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  - Polynomdivision und Hornerschema
    Sollten sich Gleichungen höheren Grades nicht durch Ausklammern vereinfachen lassen, so kann die Polynomdivision oder das Hornerschema zur Reduktion des Grads der Gleichung benutzt werden.
    *Beispiel*: $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$
    Vorgehen Polynomdivision:
    1. Finde eine Lösung für die Gleichung durch Probieren
    2. schriftliche Division ausführen (Lösung $x = 1$ → $(x - 1)$ als Divisor

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ( | $x^3$ | + | $x^2$ | − | $10x$ | + | 8 | ) | : | ( | $x$ | − | 1 | ) | = | $x^2$ | + | $2x$ | − | 8 |
| | $x^3$ | − | $x^2$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | $2x^2$ | − | $10x$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | $2x^2$ | − | $2x$ | | | | | | | | ab hier mit Lösungsformel für | | | | | | | |
| | | | | − | $8x$ | + | 8 | | | | | | quadratische Gleichungen | | | | | | | |
| | | | | − | $8x$ | + | 8 | | | | | | weiterarbeiten | | | | | | | |
| | | | | | | | 0 | | | | | | | | | | | | | |

Vorgehen Hornerschema:

1. Finde eine Lösung für die Gleichung durch Probieren ($x = -4$)
2. Schreibe die Koeffizienten der Größe ihres zugeordneten Grads nach auf

Koeffizienten der gegebenen Gleichung

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **1** | **1** | **−10** | **8** |
| | | **−4** | **12** | **−8** |
| $x = -4$ | **1** | **−3** | **2** | **0** |

3. Multipliziere und addiere wie im Schema dargestellt
4. Es ergibt sich eine Gleichung, die vom Grad her eins kleiner ist, als die gegebene: $1 \cdot x^2 - 3x + 2 = 0$ → Lösungsformel anwenden zur weiteren Berechnung

➢ Wurzelgleichungen

Als erstes muss der Definitionsbereich angegeben werden, da aus negativen Zahlen keine Wurzel gezogen werden kann, wenn als Grundbereich die reellen Zahlen vorausgesetzt werden.
Beim Lösen von Wurzelgleichungen ist darauf zu achten, dass die Wurzel stets allein auf einer Seite der Gleichung steht. Anschließend kann quadriert werden, sodass die Wurzel sich mit dem Quadrat aufhebt. In jedem Fall ist bei der berechneten Lösung eine Probe zu machen und die Lösungsmenge anzugeben.
Beispiel:

$$\begin{aligned}
x - 2 \cdot \sqrt{x} &= 3 \\
-2 \cdot \sqrt{x} &= 3 - x \\
\sqrt{x} &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\
\left(\sqrt{x}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)^2 \\
x &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{9}{4} \\
0 &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{10}{4}x + \frac{9}{4} \\
0 &= x^2 - 10x + 9 \\
x_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - 9} = 5 \pm \sqrt{16} = 5 \pm 4 \\
x_1 &= 9 \\
x_2 &= 1
\end{aligned}$$

Probe: $1 - 2 \cdot \sqrt{1} = 1 - 2 = -1 \neq 3$ und $9 - 2 \cdot \sqrt{9} = 9 - 6 = 3$
Lösungsmenge $L = \{9\}$

➢ Exponential- und Logarithmusgleichungen

Wie auch schon bei Wurzelgleichungen muss zunächst der Definitionsbereich angegeben werden. Anschließend wird auch hier versucht die Potenz bzw. den Logarithmus auf eine Seite der Gleichung zu bringen. Danach wird die Umkehroperation ausgeführt und mit mathematischen Termumformungen die Lösung bestimmt.

Beispiel:

| Exponentialgleichung | Logarithmusgleichung |
|---|---|
| $\begin{aligned} 5\cdot 2^x-3&=27\\ 5\cdot 2^x&=30\\ 2^x&=6\\ \ln(2^x)&=\ln(6)\\ x\cdot\ln(2)&=\ln(6)\\ x&=\frac{\ln(6)}{\ln(2)}\approx 2{,}58\end{aligned}$ | $\begin{aligned} 2\cdot\log_4(2x-1)&=20\\ \log_4(2x-1)&=10\\ 4^{\log_4(2x-1)}&=4^{10}\\ 2x-1&=4^{10}\\ 2x&=4^{10}+1\\ x&=\frac{4^{10}+1}{2}=524288{,}5\end{aligned}$ |

- Bruchgleichungen

Bruchgleichungen sind Gleichungen, in denen Brüche vorkommen, also auch im Nenner ein Term mit einer Unbekannten steht.

Vorgehen zum Lösen:

1. Definitionsbereich angeben (Der Term unter dem Bruchstrich darf nicht 0 werden!)
2. so erweitern, dass alle Nenner gleich sind
3. Berechnen
4. Probe machen und Lösungsmenge angeben

Beispiel: Definitionsbereich $DB = x \in \mathbb{R}\{5; -5\}$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-5}&=\frac{-2{,}25}{x^2-25}\\
\frac{x\cdot(x+5)}{(x-5)\cdot(x+5)}&=\frac{-2{,}25}{(x-5)\cdot(x+5)}\\
x\cdot(x+5)&=-2{,}25\\
x^2+5x&=-2{,}25\\
x^2+5x+2{,}25&=0\\
x_{1/2}&=-2{,}5\pm\sqrt{2{,}5^2-2{,}25}\\
x_{1/2}&=-2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-2{,}25}=-2{,}5\pm\sqrt{4}\\
x_1&=-2{,}5+2=-0{,}5\\
x_2&=-2{,}5-2=-4{,}5
\end{aligned}$$

Probe: $\frac{-0{,}5}{-0{,}5-5}=\frac{-2{,}25}{(-0{,}5)^2-25}\Leftrightarrow\frac{1}{11}=\frac{1}{11}$ und $\frac{-4{,}5}{-4{,}5-5}=\frac{-2{,}25}{(-4{,}5)^2-25}\Leftrightarrow\frac{9}{19}=\frac{9}{19}$

Lösungsmenge: $L=\{-0{,}5;-4{,}5\}$

- Betragsgleichungen bzw. Betragsungleichungen

Beim Lösen von Betragsgleichungen muss immer eine Fallunterscheidung gemacht werden, da der Betrag einer reellen Zahl wie folgt definiert ist:

$$|x|=\begin{cases} x & : x\geq 0\\ (-1)\cdot x & : x<0\end{cases}$$

Beispiel Betragsgleichung:

$$|4x-5|=20$$

| 1. Fall: $x\geq\frac{5}{4}$ (Betrag wird positiv) | 2. Fall: $x<\frac{5}{4}$ (Betrag wird negativ) |
|---|---|
| $\begin{aligned}(4x-5)&=20\\ x&=\frac{25}{4}\end{aligned}$ | $\begin{aligned}(-1)\cdot(4x-5)&=20\\ -4x+5&=20\\ x&=-\frac{15}{4}\end{aligned}$ |

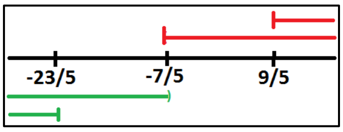
Lösungsmenge: $L=\left\{\frac{25}{4};-\frac{15}{4}\right\}$

Beispiel Betragsungleichung:

$$3-|5x+7| \leq -13$$

| 1. Fall: $x \geq -\frac{7}{5}$ (Betrag wird positiv) | 2. Fall: $x < -\frac{7}{5}$ (Betrag wird negativ) |
|---|---|
| $3-(5x+7) \leq -13$<br>$3-5x-7 \leq -13$<br>$-5x-4 \leq -13$<br>$-5x \leq -9$<br>$x \geq \frac{9}{5}$ | $3-(-1)\cdot(5x+7) \leq -13$<br>$3-(-5x-7) \leq -13$<br>$3+5x+7 \leq -13$<br>$5x \leq -23$<br>$x \leq -\frac{23}{5}$ |

Um die Lösungsmenge eindeutig zu bestimmen, eignet sich ein Zahlenstrahl. Der jeweilige Durchschnitt der roten und grünen Linien ist die Lösungsmenge:




Lösungsmenge: $L = \left(-\infty; -\frac{23}{5}\right] \cup \left[\frac{9}{5}; \infty\right)$

## Übungen

### zu 3.1.

a) Multiplizieren Sie aus: $(3x-4y)\cdot(4-6x)\cdot(-2y-6)$

b) Klammern Sie soweit wie möglich aus:

$$12ab^3c^4-16a^2bc^3+20bc-32a^4b^2c^3$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

a. $(-2{,}5x+3y)^2$
b. $(24xy^2+3x)\cdot(8y^2-1)$
c. $\left(\frac{2}{7}a-\frac{1}{3}b\right)^2$

d) Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

$$36x+\Big(8a-7b-\big(7x+6y-3a+(-5)\big)\Big)$$

### zu 3.2.

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an (Grundmenge $\mathbb{R}$)!

a) $-8+3x=7x+4$
b) $15\cdot(2x-16)-6\cdot(x+14)=(5x-18)\cdot(-4)-(3x-7)\cdot 12$
c) $100x\leq 2000+50x$
d) $3x-7>5x+8$

### zu 3.3.

Lösen Sie die folgenden (Un-)Gleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an (Grundmenge $\mathbb{R}$)!

a) $x^2-21x+110=0$
b) $10\cdot(3x^2+2x)=5x\cdot(x-2)-8$
c) $x^2+2x-3<0$
d) $8x\cdot(2x-1)\geq 3$

### zu 3.4.

Bestimmen Sie die Lösung der (Un-)Gleichungen! Geben Sie die Lösungsmenge an!

a) $x^4-4x^2+3=0$
b) $2x^8-6x^7+4x^6=0$
c) $6\cdot\sqrt{x}-105=-3x$
d) $2\cdot 5^{3x}=8$
e) $18+4^{2\cdot(2-4x)}=118$
f) $\frac{x+2}{x-3}-\frac{2-x}{6-x}=0$
g) $3-|2x+5|=-7$
h) $|4x^2+8x+4|>16x$

**Lösungen**

**zu 3.1.**

a) Multiplizieren Sie aus: $(3x-4y)\cdot(4-6x)\cdot(-2y-6)$

$$= (12x-18x^2-16y+24xy)\cdot(-2y-6)$$
$$= -24xy-72x+36x^2y+108x^2+32y^2+96y-48xy^2-144xy$$
$$= -168xy-72x+36x^2y+108x^2+32y^2+96y-48xy^2$$

b) Klammern Sie soweit wie möglich aus:

$$12ab^3c^4-16a^2bc^3+20bc-32a^4b^2c^3$$
$$= 4bc(3ab^2c^3-4a^2c^2+5-8a^4bc^2)$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

a. $(-2{,}5x+3y)^2$
$= (-2{,}5x)^2-2\cdot(2{,}5x)\cdot(3y)+(3y)^2$
$= 6{,}25x^2-15xy+9y^2$

b. $(24xy^2+3x)\cdot(8y^2-1)$
$= 3x\cdot(8y^2+1)\cdot(8y^2-1)$
$= 3x\cdot((8y^2)^2-(1)^2)$
$= 3x\cdot(64y^4-1)$
$= 192xy^4-3x$

c. $\left(\frac{2}{7}a-\frac{1}{3}b\right)^2$
$= \left(\frac{2}{7}a\right)^2-2\cdot\left(\frac{2}{7}a\right)\cdot\left(\frac{1}{3}b\right)+\left(\frac{1}{3}b\right)^2$
$= \frac{4}{49}a^2-\frac{4}{21}ab+\frac{1}{9}b^2$

d) Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

$$36x+\Big(8a-7b-\big(7x+6y-3a+(-5)\big)\Big)$$
$$= 36x+\big(8a-7b-(7x+6y-3a-5)\big)$$
$$= 36x+(8a-7b-7x-6y+3a+5)$$
$$= 36x+8a-7b-7x-6y+3a+5$$
$$= 29x+11a-7b-6y+5$$

**zu 3.2.**

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an (Grundmenge $\mathbb{R}$)!

a) $-8+3x=7x+4$

$$\begin{aligned} -8+3x &= 7x+4 \\ 3x &= 7x+12 \\ -4x &= 12 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$L=\{-3\}$

b) $15 \cdot (2x - 16) - 6 \cdot (x + 14) = (5x - 18) \cdot (-4) - (3x - 7) \cdot 12$

$$\begin{aligned} 15 \cdot (2x - 16) - 6 \cdot (x + 14) &= (5x - 18) \cdot (-4) - (3x - 7) \cdot 12 \\ 30x - 240 - 6x - 84 &= -20x + 72 - 36x + 84 \\ 24x - 324 &= -56x + 156 \\ 80x - 324 &= 156 \\ 80x &= 480 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$L = \{6\}$

c) $100x \leq 2000 + 50x$

$$\begin{aligned} 100x &\leq 2000 + 50x \\ 50x &\leq 2000 \\ x &\leq 40 \end{aligned}$$

$L = (-\infty; 40]$

d) $3x - 7 > 5x + 8$

$$\begin{aligned} 3x - 7 &> 5x + 8 \\ -2x - 7 &> 8 \\ -2x &> 15 \\ x &< \frac{15}{2} \end{aligned}$$

$L = \left(-\infty; \frac{15}{2}\right)$

**zu 3.3.**

Lösen Sie die folgenden (Un-)Gleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an (Grundmenge $\mathbb{R}$)!

a) $x^2 - 21x + 110 = 0$

$$x^2 - 21x + 110 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{-21}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2 - 110} \\ &= 10{,}5 \pm \sqrt{110{,}25 - 110} \\ &= 10{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = 10{,}5 \pm 0{,}5 \\ x_1 &= 11 \\ x_2 &= 10 \end{aligned}$$

$L = \{10; 11\}$

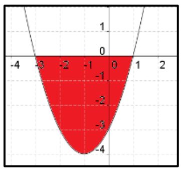
b) $10 \cdot (3x^2 + 2x) = 5x \cdot (x - 2) - 8$

$$\begin{aligned} 30x^2 + 20x &= 5x^2 - 10x - 8 \\ 25x^2 + 30x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 25 \cdot 8}}{2 \cdot 25} = \frac{-30 \pm 10}{50} \\ x_1 &= -\frac{2}{5} \\ x_2 &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$L = \left\{-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}\right\}$

c) $x^2 + 2x - 3 < 0$



$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

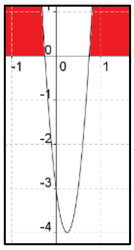
$$x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$

$L = (-3; 1)$

d) $8x \cdot (2x - 1) \geq 3$



$$8x \cdot (2x - 1) \geq 3$$

$$16x^2 - 8x \geq 3$$

$$16x^2 - 8x - 3 \geq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-3)}}{2 \cdot 16} = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{32} = \frac{8 \pm 16}{32}$$

$$x_1 = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}$$

$L = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; \infty\right)$

**zu 3.4.**

Bestimmen Sie die Lösung der (Un-)Gleichungen! Geben Sie die Lösungsmenge an!

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = z$$

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{1}$$

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = 1$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm\sqrt{3}$$

$$x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm 1$$

$L = \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}$

b) $2x^8 - 6x^7 + 4x^6 = 0$

$$2x^8 - 6x^7 + 4x^6 = 0$$

$$2x^6(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_{2/3} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 1$$

$L = \{0; 1; 2\}$

c) $6 \cdot \sqrt{x} - 105 = -3x$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R} \backslash (-\infty; 0)$

$$\begin{aligned} 6 \cdot \sqrt{x} - 105 &= -3x \\ 6 \cdot \sqrt{x} &= -3x + 105 \\ \sqrt{x} &= -\frac{1}{2}x + \frac{35}{2} \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{35}{2}\right)^2 \\ x &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{35}{2}x + \frac{1225}{4} \\ 4x &= x^2 - 70x + 1225 \\ 0 &= x^2 - 74x + 1225 \\ x_{1/2} &= 37 \pm \sqrt{37^2 - 1225} = 37 \pm \sqrt{144} = 37 \pm 12 \\ x_1 &= 49 \\ x_2 &= 25 \end{aligned}$$

$L = \{25\}$, da bei der Probe $x_1 = 49$ als mögliche Lösung entfällt

d) $2 \cdot 5^{3x} = 8$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5^{3x} &= 8 \\ 5^{3x} &= 4 \\ \ln(5^{3x}) &= \ln(4) \\ 3x \cdot \ln(5) &= \ln(4) \\ 3x &= \frac{\ln(5)}{\ln(4)} \\ x &= \frac{\ln(5)}{3 \cdot \ln(4)} \approx 0{,}39 \end{aligned}$$

$L = \{0{,}39\}$

e) $18 + 4^{2 \cdot (2-4x)} = 118$

$$\begin{aligned} 18 + 4^{2 \cdot (2-4x)} &= 118 \\ 4^{4-8x} &= 100 \\ \ln(4^{4-8x}) &= \ln(100) \\ (4 - 8x) \cdot \ln(4) &= \ln(100) \\ 4 - 8x &= \frac{\ln(100)}{\ln(4)} \\ -8x &= \frac{\ln(100)}{\ln(4)} - 4 \\ x &= -\frac{\ln(100)}{8 \cdot \ln(4)} + \frac{1}{2} \approx 0{,}085 \end{aligned}$$

$L = \{0{,}085\}$

f) $\frac{x+2}{x-3} - \frac{2-x}{6-x} = 0$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}\{3; 6\}$

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-3} - \frac{2-x}{6-x} &= 0 \\ \frac{x+2}{x-3} &= \frac{2-x}{6-x} \\ (x+2) \cdot (6-x) &= (2-x) \cdot (x-3) \\ 6x - x^2 + 12 - 2x &= 2x - 6 - x^2 + 3x \\ 4x - x^2 + 12 &= 5x - 6 - x^2 \\ 4x + 12 &= 5x - 6 \\ -x &= -18 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

$L = \{18\}$

g) $3 - |2x+5| = -7$

| $3 - \lvert 2x+5 \rvert = -7$ | |
|---|---|
| 1. Fall: $x \leq -\frac{5}{2}$ →Betrag wird positiv | 2. Fall: $x > -\frac{5}{2}$ →Betrag wird negativ |
| $3 - (2x+5) = -7$<br>$3 - 2x - 5 = -7$<br>$-2x = -5$<br>$x = \frac{5}{2}$ | $3 - (-1) \cdot (2x+5) = -7$<br>$3 + 2x + 5 = -7$<br>$2x = -15$<br>$x = -\frac{15}{2}$ |

$L = \left\{\frac{5}{2}; -\frac{15}{2}\right\}$

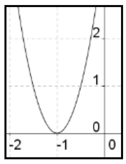
h) $|4x^2 + 8x + 4| > 16x$

$|4x^2 + 8x + 4| > 16x$

Wann wird Betrag 0?

$4x^2 + 8x + 4 = 0$

$x_{1/2} = -1$




bei $x = -1$ gibt es eine Doppelnullstelle und Parabel nach oben geöffnet

→ der Betrag wird NIE negativ!

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x + 4 &> 16x \\ 4x^2 - 8x + 4 &> 0 \\ 4 \cdot (x^2 - 2x + 1) &> 0 \\ 4 \cdot (x-1)^2 &> 0 \\ x_{1/2} &= 1 \end{aligned}$$

$L = \mathbb{R}\backslash\{1\}$