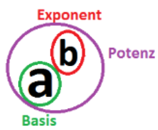
2. Zahlbereiche – Besonderheiten und Rechengesetze

Die kleineren Zahlbereiche sind jeweils Teilmengen von größeren Zahlbereichen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2.1. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- besitzt abzählbar unendlich viele Elemente
- Rechengesetze
  Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
  Kommutativgesetz: $a + b = b + a$
  Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Potenzen
  $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b-mal}$



  Beispiel: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 25 = 625$
- Potenzgesetze

Basisfall	$a^0 = 1$
gleiche Basis, unterschiedlicher Exponent	$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
	$a^b : a^c = a^{b-c}$
gleicher Exponent, unterschiedliche Basis	$a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b$
	$a^b : c^b = (a : c)^b$
Potenzieren einer Potenz	$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c} = a^{c \cdot b} = (a^c)^b$

2.2. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z} = \{\dots\ , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- besitzt abzählbar unendlich viele Elemente
- Rechengesetze/ -regeln
  Aufpassen beim Auflösen von Klammern mit negativem Vorzeichen!
  Assoziativgesetz: $a - (b + c) = a - b - c$
  $a - (-b - c) = a + b + c$
  $a - (b - c) = a - b + c$
  $a - (-b + c) = a + b - c$

Kommutativgesetz: $a - b = -b + a$

Hinweis: Die Vorzeichen müssen beibehalten werden!

Distributivgesetz: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

$a \cdot (-b + c) = -a \cdot b + a \cdot c$

Multiplikation und Division zweier ganzer Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$

	$a > 0$	$a < 0$
$b > 0$	$a \cdot b > 0$ $a : b > 0$	$a \cdot b < 0$ $a : b < 0$
$b < 0$	$a \cdot b < 0$ $a : b < 0$	$a \cdot b > 0$ $a : b > 0$

- Potenzen

  $a^{-b} = \frac{1}{a^b} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b-mal}}$

2.3. Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$

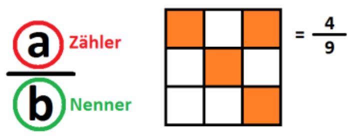
  Menge aller endlichen oder periodischen Dezimalbrüche

- besitzt abzählbar unendlich viele Elemente (Abzählschema von Georg Cantor[1])

- Begriffe:

  Nenner: nennt die Gesamtheit an gleichgroßen Teilen

  Zähler: zählt die markierten Teile



  echter gemeiner Bruch: $\frac{a}{b}$ mit $a < b$; Bsp.: $\frac{4}{9}$

  unechter gemeiner Bruch: $\frac{a}{b}$ mit $a > b$; Bsp.: $\frac{9}{4}$

  gemischte Zahl: $a\frac{b}{c}$ mit $b < c$; Bsp.: $2\frac{1}{4}$

- Umwandlung unechter gemeiner Bruch in gemischte Zahl

  Vorgehen:
  1. Bruch wird als Divisionsaufgabe verstanden
  2. und mit Rest ausgeführt
  3. gemischte Zahl aufschreiben

  Bsp.: $9 \ : \ 4 \ = 2 \ R \ 1 \ = 2\frac{1}{4}$

[1] Scholl, Drews: Handbuch Mathematik, Orbis Verlag, München, 2001, S.69

- Umwandlung gemischte Zahl in unechten gemeinen Bruch

  Vorgehen: 1. Nenner wird zu ganzer Zahl multipliziert
  2. Ergebnis wird zum Zähler addiert
  3. Bruch aufschreiben

  Bsp.: $2\frac{1}{4} = \frac{4\cdot 2+1}{4} = \frac{9}{4}$

- Erweitern/ Kürzen

  Beim Erweitern bzw. Kürzen ändert sich an der Größe des Bruches nichts.
  Nenner und Zähler werden jeweils mit der gleichen Zahl multipliziert bzw. dividiert.

$$\frac{a}{b} \xrightarrow{erweitert\ mit\ c} \frac{a\cdot c}{b\cdot c}$$

$$\frac{a\cdot c}{b\cdot c} \xrightarrow{gekürzt\ mit\ c} \frac{a}{b}$$

  Bsp.: $\frac{5}{10} \xrightarrow{erw.\ mit\ 3} \frac{15}{30} \xrightarrow{gek.\ mit\ 15} \frac{1}{2}$

- Addition und Subtraktion von Brüchen

  Um Brüche zu addieren bzw. zu subtrahieren, müssen sie nennergleich gemacht werden, d.h. sie müssen so erweitert werden, dass sie denselben Nenner besitzen. Anschließend können die Zähler addiert oder subtrahiert werden.

  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a\pm c}{b}$ und $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot d} \pm \frac{c\cdot b}{d\cdot b} = \frac{a\cdot d\pm c\cdot b}{b\cdot d}$

  Derselbe Nenner lässt sich am einfachsten finden, wenn beide Nenner miteinander multipliziert werden. Allerdings ist dies nicht immer am sinnvollsten, wie folgendes Beispiel zeigt: $\frac{7}{18} + \frac{1}{4} = \frac{28}{72} + \frac{18}{72} = \frac{46}{72} = \frac{23}{36}$.
  Der kleinste gemeinsame Nenner lässt sich durch Primfaktorenzerlegung der beiden Nenner finden.

  Vorgehen: 1. von beiden Zahlen wird die Primfaktorenzerlegung gebildet, d. h. die Zahl wird in Faktoren zerlegt, die Primzahlen sind
  2. diese werden geordnet untereinander geschrieben
  3. Nimmt man jeden Faktor, der auf diese Weise entsteht und multipliziert sie, so ergibt sich das kleinste gemeinsame Vielfache

4	2	2		
18	2		3	3
36	2	2	3	3

- Multiplikation und Division von Brüchen, Doppelbrüche

  Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

  Division und Doppelbruchregel:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

- Umwandlung eines Bruches in eine Dezimalzahl
  Der Bruchstrich wird als Divisionszeichen verstanden und die Division schriftlich ausgeführt.
  Bsp.: $\frac{1}{15} = 0{,}0\overline{6}$

1,	0	0	0	0	:	1	5	=	0,	0	$\overline{6}$	
0												
1	0											
	0											
1	0	0										
	9	0										
	1	0	0									
			…									

- Umwandlung einer periodischen Dezimalzahl in einen Bruch
  1. Schritt: Die Dezimalzahl wird so multipliziert, dass einmal die komplette Periode vor dem Komma steht.
  2. Schritt: Die Dezimalzahl wird so multipliziert, dass die Periode direkt nach dem Komma beginnt.
  3. Schritt: Beide so entstandenen Gleichungen werden voneinander abgezogen und nach der gesuchten Dezimalzahl umgestellt.

  Beispiel: $0{,}0\overline{6}$

1	0	0	·	0	,	0	$\overline{6}$	=	6	,	$\overline{6}$					
	1	0	·	0	,	0	$\overline{6}$	=	0	,	$\overline{6}$					
	9	0	·	0	,	0	$\overline{6}$	=	6				/	:	9	0
				0	,	0	$\overline{6}$	=	$\frac{6}{90}$	=	$\frac{1}{15}$					

- Potenzen: $a^{b/c} = \sqrt[c]{a^b}$

2.4. Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

- schließen alle irrationalen Zahlen mit ein
- irrationale Zahlen sind unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche, z.B. $\sqrt{2} = 1{,}41$ ...
- besitzen überabzählbar unendlich viele Elemente
- Wurzelgesetze → lassen sich auf Potenzgesetze zurückführen

$$\sqrt[c]{a \cdot b} = \sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b}$$
$$\sqrt[c]{a : b} = \sqrt[c]{a} : \sqrt[c]{b}$$

- Logarithmen und Logarithmengesetze
  Die Logarithmen ergeben sich als Umkehroperation zum Potenzieren

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$$

Gesetze: $\log_a(c \cdot b) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$

$\log_a a = 1$

besondere Logarithmen:

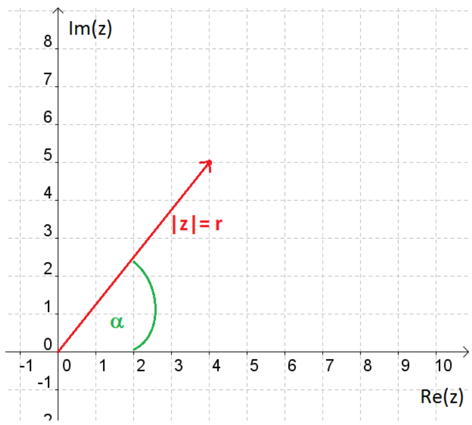
$\log_{10} a = \lg(a)$	Zehnerlogarithmus
$\log_2 a = \mathrm{ld}(a)$	Zweierlogarithmus
$\log_e a = \ln(a)$	natürlicher Logarithmus mit Basis e
	$e = 2{,}71\ldots$ Eulersche Zahl

2.5. Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

- Erweiterung des Zahlraums um eine sogenannte imaginäre Einheit i
  Begründung: Gleichungen der Form $x^2 = -1$ sind mit den bisher bekannten Zahlbereichen nicht lösbar
  damit ergibt sich: $\boxed{i = \sqrt{-1}}$ und $\boxed{i^2 = -1}$

- komplexe Zahlen haben die Form $z = a + b \cdot i$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$
  a wird als Realteil und b als Imaginärteil bezeichnet

- Darstellung von $z = 4 + 5i$ in der Gaußschen Zahlenebene:
  - auf der x-Achse wird der Realteil abgetragen
  - auf der y-Achse wird der Imaginärteil abgetragen
  - Punkt ist imaginäre Zahl z
  - es gibt noch weitere Darstellungsmöglichkeit
    $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$, wobei hier die Länge r vom Ursprung zum Punkt, sowie der eingeschlossene Winkel α benutzt werden



- Rechenoperationen bei komplexen Zahlen
  Es seien zwei komplexe Zahlen $z_1 = a + b \cdot i$ und $z_2 = c + d \cdot i$ gegeben.

Rechenoperation	Beispiel mit $z_1 = 5 + 3i$ und $z_2 = 4 - 2i$
$z_1 + z_2 = (a + c) + i \cdot (b + d)$	$(5 + 3i) + (4 - 2i) = 9 + i$
$z_1 - z_2 = (a - c) + i \cdot (b - d)$	$(5 + 3i) - (4 - 2i) = 1 + 5i$
$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i \cdot (ad + bc)$	$(5 + 3i) \cdot (4 - 2i) = 26 + 2i$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + i \cdot (bc - ad)}{c^2 + d^2}$	$\frac{5 + 3i}{4 - 2i} = \frac{(20 - 6) + i \cdot (12 + 10)}{4^2 + 2^2} = \frac{14}{20} + \frac{22}{20} \cdot i$
konjugiert komplex: $\bar{z_1} = a - b \cdot i$	$\bar{z_1} = 5 - 3i \qquad \bar{z_2} = 4 + 2i$
Betrag: $\lvert z_1 \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\lvert z_1 \rvert = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ $\lvert z_2 \rvert = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

Übungen

zu 2.1.

Berechnen Sie vorteilhaft und ohne Verwendung des Taschenrechners!

a) $23 + 34 + 17 + 56 =$
b) $398 + 21 + 34 + 94 + 76 + 22 + 217 + 43 =$
c) $2^4 \cdot 2^3 \cdot (2 \cdot 2)^3 =$
d) $5^8 : 5^5 =$
e) $4^2 \cdot 2^4 =$

zu 2.2.

Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners!

a) $15 - (-8 - 5) =$
b) $-14 + (18 - 6) =$
c) $(-20 - 22 + 78) - (65 - 11) =$
d) $(-2)^5 =$
e) $(-1) \cdot [(2 - 3) - 4 \cdot (-5 - 6)] - [-7 \cdot (-8 + 9)] \cdot (-10) =$

zu 2.3.

1) Erweitern sie auf den gegebenen Nenner!

a) $\frac{5}{3} = \frac{}{30}$
b) $\frac{2}{17} = \frac{}{51}$
c) $\frac{5}{10} = \frac{}{18}$
d) $\frac{4}{9} = \frac{}{54}$

2) Kürzen Sie soweit wie möglich!

a) $\frac{110}{11}$
b) $\frac{144}{300}$
c) $\frac{48}{80}$
d) $\frac{32}{144}$

3) Berechnen Sie! Kürzen Sie gegebenenfalls soweit wie möglich!

a) $\frac{4}{10} + \frac{3}{4}$
b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$
c) $\frac{1}{4} + \frac{5}{9} + \frac{3}{2}$
d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{5}$
e) $\frac{19}{20} - \frac{1}{3}$
f) $\frac{2}{3} - \left(\frac{4}{9} - \frac{3}{5}\right)$

4) Berechnen Sie! Kürzen Sie gegebenenfalls soweit wie möglich!

a) $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$

c) $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{4} : \frac{1}{5}$

e) $\frac{19}{20} : \frac{1}{3}$

f) $\frac{2}{3} : \left(\frac{4}{9} : \frac{3}{5}\right)$

5) Wandeln Sie in die jeweils andere Darstellung um!

a) $\frac{3}{75} =$

b) $5\,\frac{3}{27} =$

c) $0{,}2\overline{7} =$

d) $3{,}\overline{45} =$

zu 2.4.

Wenden Sie Wurzelgesetze und Logarithmengesetze an und berechnen Sie ohne Taschenrechner!

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

b) $\sqrt[3]{2^3}$

c) $\log_5(5^3)$

d) $\log_4 64$

zu 2.5.

Gegeben sind $z_1 = 2 + 4i$ und $z_2 = 3 + i$. Berechnen Sie Summe, Differenz, Produkt, Quotient, das jeweils konjugiert komplexe und den Betrag der beiden komplexen Zahlen. Stellen Sie anschließend die Zahlen und Ihre berechneten Ergebnisse in der Gauß'schen Zahlenebene dar!

Lösungen

zu 2.1.

Berechnen Sie vorteilhaft und ohne Verwendung des Taschenrechners!

a) $23 + 34 + 17 + 56 = 40 + 90 = 130$

b) $398 + 21 + 34 + 94 + 76 + 22 + 217 + 43 = 420 + 115 + 110 + 260 = 905$

c) $2^4 \cdot 2^3 \cdot (2 \cdot 2)^3 = 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{4+3+3+3} = 2^{13} = 8192$

d) $5^8 : 5^5 = 5^{8-5} = 5^3 = 125$

e) $4^2 \cdot 2^4 = (2^2)^2 \cdot 2^4 = 2^4 \cdot 2^4 = 2^{4+4} = 2^8 = 256$

zu 2.2.

Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners!

a) $15 - (-8 - 5) = 15 - (-13) = 15 + 13 = 28$

b) $-14 + (18 - 6) = -14 + 12 = -2$

c) $(-20 - 22 + 78) - (65 - 11) = 36 - 54 = -18$

d) $(-2)^5 = -32$

e) $$\begin{aligned} &(-1) \cdot [(2-3) - 4 \cdot (-5-6)] - [-7 \cdot (-8+9)] \cdot (-10) \\ &= (-1) \cdot [(-1) - 4 \cdot (-11)] - [-7 \cdot 1] \cdot (-10) \\ &= (-1) \cdot [-1 + 44] - (-7) \cdot (-10) \\ &= -43 - 70 \\ &= -113 \end{aligned}$$

zu 2.3.

1. Erweitern sie auf den gegebenen Nenner!

   a) $\frac{5}{3} = \frac{50}{30}$ c) $\frac{5}{10} = \frac{9}{18}$

   b) $\frac{2}{17} = \frac{6}{51}$ d) $\frac{4}{9} = \frac{24}{54}$

2. Kürzen Sie soweit wie möglich!

   a) $\frac{110}{11} = \frac{10}{1} = 10$ c) $\frac{48}{80} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

   b) $\frac{144}{300} = \frac{36}{75} = \frac{12}{25}$ d) $\frac{32}{144} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

3. Berechnen Sie! Kürzen Sie gegebenenfalls soweit wie möglich!

   a) $\frac{4}{10} + \frac{3}{4} = \frac{8+15}{20} = \frac{23}{20}$ d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{15-4}{20} = \frac{11}{20}$

   b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$ e) $\frac{19}{20} - \frac{1}{3} = \frac{57-20}{60} = \frac{37}{60}$

   c) $\frac{1}{4} + \frac{5}{9} + \frac{3}{2} = \frac{9+20+54}{36} = \frac{83}{36}$ f) $\frac{2}{3} - \left(\frac{4}{9} - \frac{3}{5}\right) = \frac{30-20+27}{45} = \frac{37}{45}$

5. Berechnen Sie! Kürzen Sie gegebenenfalls soweit wie möglich!

a) $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{24}$

d) $\frac{3}{4} : \frac{1}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{15}{4}$

e) $\frac{19}{20} : \frac{1}{3} = \frac{19}{20} \cdot \frac{3}{1} = \frac{57}{20}$

f) $\frac{2}{3} : \left(\frac{4}{9} : \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{3} : \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{20} = \frac{9}{10}$

6. Wandeln Sie in die jeweils andere Darstellung um!

a) $\frac{3}{75} = 0{,}04$

b) $5\frac{3}{27} = 5{,}\overline{1}$

c) $0{,}2\overline{7} = \frac{5}{18}$

d) $3{,}\overline{45} = 3\frac{45}{99}$

zu 2.4.

Wenden Sie Wurzelgesetze und Logarithmengesetze an und berechnen Sie ohne Taschenrechner!

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$

d) $\sqrt[3]{2^3} = 2$

c) $\log_5(5^3) = 3 \cdot \log_5 5 = 3 \cdot 1 = 3$

d) $\log_4 64 = \log_4(4^3) = 3$

zu 2.5.

Gegeben sind $z_1 = 2 + 4i$ und $z_2 = 3 + i$. Berechnen Sie Summe, Differenz, Produkt, Quotient, das jeweils konjugiert komplexe und den Betrag der beiden komplexen Zahlen. Stellen Sie anschließend die Zahlen und Ihre berechneten Ergebnisse in der Gauß'schen Zahlenebene dar!

- ✓ $z_3 = z_1 + z_2 = (2 + 4i) + (3 + i) = 5 + 5i$
- ✓ $z_4 = z_1 - z_2 = (2 + 4i) - (3 + i) = -1 + 3i$
- ✓ $z_5 = z_1 \cdot z_2 = (2 + 4i) \cdot (3 + i) = 6 - 4 + i \cdot (2 + 12) = 2 + 14i$
- ✓ $z_6 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2+4i}{3+i} = \frac{6+4+i\cdot(12-2)}{3^2+1^2} = \frac{10 + 10i}{10} = 1 + i$
- ✓ $z_7 = \overline{z_1} = 2 - 4i$
- ✓ $z_8 = \overline{z_2} = 3 - i$
- ✓ $|z_1| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$
- ✓ $|z_2| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$