

## 5. Schwerpunkt: Differenzialrechnung, Funktionen

5.1 Berechnen Sie für folgende Funktionen  $y = f(x)$  die erste Ableitung  $y'$

a)  $y = \sqrt{a + 4x^2}$       b)  $y = \frac{\ln(x+b)}{x^2 - b^2}$       c)  $y = x \cdot \cos(3x - \varphi)$

d)  $y \cdot \sin(3x) - xy = x - y$       e)  $y = (ax^2 - 3)(bx^2 - 2)(cx^2 - 1)$

5.2 Berechnen Sie die unbestimmten Ausdrücke

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - x}{3x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + 7}{4x^3 + 8}$       c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} \cdot e^{-x})$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 4) \cdot \ln(x - 2)]$       d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - 1}{\cos(4x) - 1}$

5.3 Eine Funktion sei wie folgt definiert:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Welche Art von Unstetigkeit besitzt die Funktion an  $x = 0$ ?

Bestimmen Sie dazu dort die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

5.4 Lösen Sie folgende nichtlineare Gleichung mit dem Newtonschen Tangentenverfahren.

$$e^{0,5x} = 5 - 2x$$

Verwenden Sie den Startwert  $x_0 = 3,0$  und führen Sie noch 3 weitere Iterationsschritte bis zum Wert  $x_3$  mit 4 Stellen Genauigkeit nach dem Komma durch.

5.5 Beschreiben Sie den Verlauf der Funktion  $y = \frac{\sin(x)}{x}$

- Wo befinden sich die Nullstellen?
- Wie ist das asymptotische Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ ?
- Wo liegen die Extremwerte (im Vergleich zur normalen Sin-Funktion)?
- Welche Unstetigkeit liegt an  $x=0$  vor?
- Ist es evtl. eine gerade oder ungerade Funktion?
- Fertigen Sie eine Skizze an.

5.6 Beschreiben Sie den Verlauf der Funktion  $y = e^{-x^2}$

- Wo befinden sich ggf. Nullstellen?
- Wie ist das asymptotische Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ ?
- Bestimmen Sie Extremwerte und Wendepunkte.
- Gibt es Unstetigkeiten?
- Ist es evtl. eine gerade oder ungerade Funktion?

f) Fertigen Sie eine Skizze an.

5.7 Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen nach den in den Funktionen enthaltenen Unabhängigen:

a)  $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2$

b)  $z = f(x, y, t) = 3\cos(x + t) - 4\sin(x - t)$

c)  $u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

d)  $v = f(x, t) = e^{-3t} \sin(2t - 5x)$

e)  $\varphi = f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

f)  $y = f(x_1, x_2) = x_1 \ln(3x_1 + x_2)$