6. Variation der Konstanten

Diese Methode bietet sich für lin. inhom. DGL mit konst. Koeff. an, wenn die Störfunktion nicht auf einen einfachen Ansatz für eine partikuläre Lösung hinweist. Darüber hinaus ist die Methode auch oft für lineare inhom. DGL mit nicht konstanten Koeff. geeignet.

Im einfachsten Fall einer inhom. DGL erster Ordnung wird wie folgt vorgegangen:

Die freie Konstante der allgemeinen Lösung C der zugehörigen hom. DGL wird als Funktion C(x) von x betrachtet. Durch Einsetzen in die inhom. DGL erhält man eine einfachere DGL für C(x), welches dann gestimmt werden kann.

Beispiel

$$y'+\frac{1}{x}y=5e^{-2x} \qquad \text{Anfangsbedingung: } y(-0{,}5)=-8$$

$$\text{zug.hom.DGL:} \qquad y'+\frac{1}{x}y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\quad \ln|y|=-\ln|x|+\tilde{C} \quad\Rightarrow\quad \ln|xy|=\tilde{C} \quad\Rightarrow\quad xy=\pm e^{\tilde{C}}=C$$

$$\text{homogene Lösung: } y_H=\frac{C}{x}$$

$$\text{Ansatz:} \qquad y=\frac{C(x)}{x} \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C'(x)}{x}$$

$$\text{einsetzen:} \qquad -\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C'(x)}{x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{C(x)}{x}=5e^{-2x}$$

$$\text{einfache DGL für } C(x): \qquad C'(x)=5xe^{-2x} \qquad \text{integrieren!}$$

$$C(x)=-\frac{5}{2}xe^{-2x}-\frac{5}{4}e^{-2x}+K$$

$$\text{in Ansatz einsetzen:} \qquad y=-\frac{5}{2}e^{-2x}-\frac{5}{4x}e^{-2x}+\frac{K}{x} \qquad \text{allg. Lösung}$$

$$\text{Anfangsbedingung:} \qquad y(-0{,}5)=-\frac{5}{2}e^{1}-\frac{5}{-2}e^{1}+\frac{K}{-0{,}5}=-2K=-8 \quad\Rightarrow\quad K=4$$

$$\text{spezielle Lösung:} \qquad y=-\frac{5}{2}e^{-2x}-\frac{5}{4x}e^{-2x}+\frac{4}{x}$$