1. Differentialgleichungen

1.1 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch fortgesetztes Integrieren!

Aufgabe 1.1.1

$\dot{y} = t\sin(t) + 3\sqrt{t+1}$

Lösung

$$\dot{y} = t\sin(t) + 3\sqrt{t+1} \qquad \Big| \int (\ldots)\,dt$$

$$y = \int \left[t\sin(t) + 3\sqrt{t+1} \right] dt$$

$$y = \int t\sin(t)\,dt + 3\int \sqrt{t+1}\,dt$$

$$\text{NR:} \qquad \int x\sin(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$$

$$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}$$

$$y = \sin(t) - t\cos(t) + 2\sqrt{(t+1)^3} + K \qquad (\text{allg. Lösung})$$

$$y(0) = 4 \quad \rightarrow \quad 4 = \sin(0) - 0 + 2\sqrt{1} + K \quad \rightarrow \quad K = 2$$

$$y = \sin(t) - t\cos(t) + 2\sqrt{(t+1)^3} + 2 \qquad (\text{spez. Lösung})$$

Aufgabe 1.1.2 $y'' = xe^{2x} + 3e^{-x}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

Lösung

$$y'' = xe^{2x} + 3e^{-x} \qquad \Big| \int (\ldots)\,dx$$

$$\text{NR}: \qquad \int xe^{ax}dx = \left(\frac{ax-1}{a^2}\right)e^{ax}$$

$$y' = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} - 3e^{-x} + K_1$$

$$y' = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} - 3e^{-x} + K_1 \qquad \Big| \int (\ldots)\,dx$$

$$y = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)e^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x} + 3e^{-x} + K_1x + K_2$$

$$y = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + 3e^{-x} + K_1x + K_2 \qquad (\text{allg. Lösung})$$

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = -\frac{1}{4}e^0 + 3e^0 + K_2 \quad \rightarrow \quad K_2 = -1{,}75$$

$$y'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{4}e^0 - 3e^0 + K_1 \quad \rightarrow \quad K_1 = 3{,}25$$

$$y = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + 3e^{-x} + 3{,}25x - 1{,}75 \qquad (\text{spez. Lösung})$$

Aufgabe 1.1.3 $y''' = 2x - 4 + \sqrt{2x+3}; \quad y(3) = 5; \quad y(11) = 9; \quad y'(3) = 1$

Lösung

$$y''' = 2x - 4 + \sqrt{2x+3} \qquad \Big|\int(\ldots)dx$$

$$y'' = x^2 - 4x + \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + K_1 \qquad \Big|\int(\ldots)dx$$

$$y' = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{15}\sqrt{(2x+3)^5} + K_1x + K_2 \qquad \Big|\int(\ldots)dx$$

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{105}\sqrt{(2x+3)^7} + \frac{K_1}{2}x^2 + K_2x + K_3 \qquad \text{(allg. Lösung)}$$

$$y(3) = 5 \quad \rightarrow \quad -4{,}57857 = 4{,}5K_1 + 3K_2 + K_3 \qquad \text{(I.)}$$
$$y(11) = 9 \quad \rightarrow \quad -1067{,}798 = 60{,}5K_1 + 11K_2 + K_3 \qquad \text{(II.)}$$
$$y'(3) = 1 \quad \rightarrow \quad -6{,}2 = 3K_1 + K_2 \qquad \text{(III.)}$$

nach Lösung des lin. GS:

$K_1 = -31{,}675; \quad K_2 = 88{,}827; \quad K_3 = -128{,}52$

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{150}\sqrt{(2x+3)^7} - 15{,}8375x^2 + 88{,}827x - 128{,}52 \qquad \text{(spez. Lösung)}$$

Aufgabe 1.1.4 $\dot{y} = e^{-2t}\sin(t) + \ln(t+1)$

Lösung

$$\dot{y} = e^{-2t}\sin(t) + \ln(t+1) \qquad \Big|\int(\ldots)dt$$

NR :
$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\sin(bx) - b\cos(bx)\right]$$
$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$$

$$y = \frac{e^{-2t}}{5}\left[-2\sin(t) - \cos(t)\right] + (t+1)\left(\ln(t+1) - 1\right) + K \qquad \text{(allg. Lösung)}$$

Aufgabe 1.1.5 $\ddot{y} = e^{-2t} + 3t; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 2$

Lösung

$$\ddot{y} = e^{-2t} + 3t \qquad \left|\int(\ldots)dt\right.$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}t^2 + K_1 \qquad \left|\int(\ldots)dt\right.$$

$$y = \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t^3 + K_1 t + K_2 \qquad \text{(allg. Lösung)}$$

$$y(0) = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = \frac{1}{4} + K_2 \quad \rightarrow \quad K_2 = \frac{7}{4}$$

$$\dot{y}(0) = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = -\frac{1}{2} + K_1 \quad \rightarrow \quad K_1 = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t + \frac{7}{4} \qquad \text{(spez. Lösung)}$$

Aufgabe 1.1.6 $u''' = 3\cosh(x) + \sinh(x)$

Lösung

$$u''' = 3\cosh(x) + \sinh(x) \qquad \left|\int(\ldots)dx\right.$$

$$u'' = 3\sinh(x) + \cosh(x) + K_1 \qquad \left|\int(\ldots)dx\right.$$

$$u' = 3\cosh(x) + \sinh(x) + K_1 x + K_2 \qquad \left|\int(\ldots)dx\right.$$

$$u = 3\sinh(x) + \cosh(x) + \frac{K_1}{2}x^2 + K_2 x + K_3 \qquad \text{(allg. Lösung)}$$