Tutorium Mathematik 3 – Anwendung der Integralrechnung Lösungen

1) Eine Kette wird zwischen zwei gleich hohen Aufhänge punkten im Abstand l = 5 m befestigt.
Gegenüber diesen Punkten hängt sie in der Mitte um d = 3 m durch.
Wie lang ist die Kette?

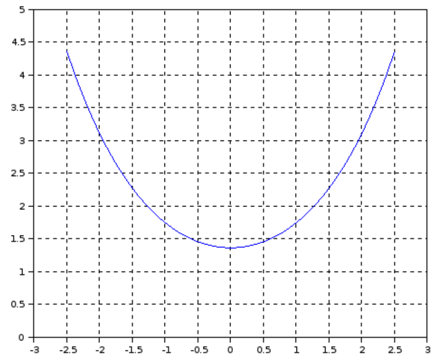


Abbildung 1: Skizze der durchhängenden Kette

$$y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b$$

$$y(0) = a + b$$

$$y(2{,}5) = a \cdot \cosh\left(\frac{2{,}5}{a}\right) + b$$

Die Kette hängt um d = 3 m durch

$$y(2{,}5) - y(0) = 3$$

$$a \cdot \cosh\left(\frac{2{,}5}{a}\right) - a = 3 \;\; | -3 \;\; |: a$$

$$\cosh\left(\frac{2{,}5}{a}\right) - 1 - \frac{3}{a} = 0 \;\; | \cdot \frac{2{,}5}{2{,}5}$$

$$\cosh\left(\frac{2{,}5}{a}\right) - 1 - \left(\frac{2{,}5}{a} \cdot \frac{3}{2{,}5}\right) = 0 \qquad , u = \frac{2{,}5}{a}$$

Nach der Substitution $u = 2{,}5/a$ kann mit dem Newton-Verfahren die Nullstelle gesucht werden:

$$\mathrm{f}(u) = 0 = \cosh(u) - \left(\frac{6}{5}u\right) - 1$$

$$\mathrm{f}'(u) = 0 = \sin(u) - \frac{6}{5}$$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{\cosh(u_n) - \left(\frac{6}{5}u_n\right) - 1}{\sin(u_n) - \frac{6}{5}}$$

Mit u_n= 2 ergibt sich nach wenigen Iterationen u = 1,82937 und somit a = 2,5/u = 1,3666. Damit ist die Funktion, welche die Kettenlinie beschreibt eindeutig definiert und es kann die Bogenlänge berechnet werden.

$$y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$s = \int_{x=-2,5}^{2,5} \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\ dx\ =\ \int_{x=-2,5}^{2,5} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\ dx\ =\ a\left[\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-2,5}^{2,5}$$

$$s = 1,3666\left[\sinh\left(\frac{2,5}{1,3666}\right) - \sinh\left(\frac{-2,5}{1,3666}\right)\right]$$

$$s = 8,294\ \text{m}$$

2) Ein Parabolspiegel wird durch die Rotation der Kurve $y = k \cdot x^2$ um die y-Achse beschrieben. Wie groß ist seine Oberfläche für $k = 1/m$ und $0 \le x \le 1$ m (der Parabolspiegel hat also damit einen Durchmesser von 2 m und eine Wölbungstiefe von 1 m).Vergleichen Sie die berechnete Oberfläche mit der einer Halbkugel vom Radius $r = 1$ m (Die Halbkugel hat auch einen Durchmesser von 2 m und eine Wölbungstiefe von 1 m).

Mit k = 1 und $y'(x) = 2x$

$$A = 2\pi \int_{x=0}^{1} x\sqrt{1+(y')^2}\ dx\ =\ 2\pi \int_{x=0}^{1} x\sqrt{1+4x^2}\ dx$$

Substitution: $u = 1 + 4x^2$

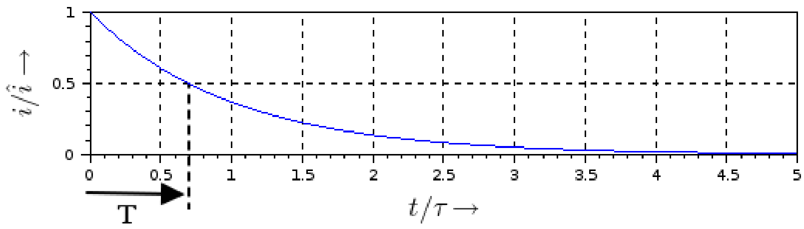
$$\frac{du}{dx} = 8x \quad | \cdot dx \quad |:(8x)$$

$$dx = \frac{du}{8x}$$

$$A = 2\pi \int_{x=0}^{1} x\sqrt{u}\ \frac{du}{8x}\ =\ \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{x=0}^{1}\ =\ \frac{\pi}{6}\left[\left(1+4x^2\right)^{3/2}\right]_{x=0}^{1}\ =\ \frac{\pi}{6}\left[(5)^{3/2} - (1)^{3/2}\right]$$

$$A = \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{125} - 1\right] \approx 5,33\ \text{m}^2 \qquad\qquad A_{HK} = \frac{1}{2}4\pi R^2 = 2\pi \approx 6,282\ \text{m}^2$$

3) Während der Zeit T falle ein Strom gemäß einer *e*-Funktion vom Wert $\hat{i}$ auf seine Hälfte. Berechnen Sie den integralen Mittelwert und den Effektivwert dieses Stroms in der Zeit T.



$$i(t) = \hat{i}\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

$$i(T) = \hat{i}\exp\left(\frac{-T}{\tau}\right) = \frac{1}{2}\hat{i} \quad |:\hat{i} \quad |\ln$$

$$\frac{-T}{\tau} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-T = \tau\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Mittelwert: $\overline{i} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \hat{i}\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\,dt = -\frac{\hat{i}\tau}{T}\left[\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right]_0^T \quad , -T = \tau\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\overline{i} = \frac{\hat{i}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\exp\left(\ln\frac{1}{2}\right) - 1\right] = -\frac{\hat{i}}{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{,}721\,\hat{i}$$

Effektivwert: $I^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \left\{\hat{i}\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right\}^2 dt = \frac{\hat{i}^2}{T}\int_0^T \exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right) dt = \frac{\hat{i}^2}{T}\left[\frac{-\tau}{2}\exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right)\right]_0^T$

$$I^2 = \frac{\hat{i}^2}{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\left\{\exp\left(\ln\frac{1}{2}\right)\right\}^2 - 1\right] = \frac{\hat{i}^2}{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\left\{\frac{1}{2}\right\}^2 - 1\right] = \frac{-3\,\hat{i}^2}{8\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$I = 0{,}736\,\hat{i}$$

4) Ein Körper entsteht durch die Rotation der Kurve $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$ um die x-Achse, wobei gilt: $0 \leq x \leq \pi$.

Berechnen Sie das Volumen des Körpers.

Hinweis: Verwenden Sie für das zu lösende Integral die partielle Integration, wobei Sie die Stammfunktion von $\sin^2 x$ aus dem Tabellenbuch entnehmen.

$$V = \pi \int_{x=0}^{\pi} y^2 \;\; dx \; = \; \pi \int_{x=0}^{\pi} x \sin^2(x) \;\; dx$$

$$u = x \qquad\qquad u' = 1$$

$$v' = \sin^2(x) \qquad v = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right)$$

$$V = \pi \left\{ \left[x \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right) \right]_{x=0}^{\pi} - \int_{x=0}^{\pi} \left(1\frac{x}{2} - 1\frac{\sin(2x)}{4} \right) dx \right\}$$

$$V = \; \pi \left\{ \left[\frac{\pi^2}{2} - 0 - 0 + 0 \right] - \left[\frac{x^2}{4} + \frac{\cos(2x)}{8} \right]_{x=0}^{\pi} \right\} \; = \; \pi \left\{ \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{8} - 0 + \frac{1}{8} \right\}$$

$$V = \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{4} = \frac{\pi^3}{4} \approx 7{,}75 \text{ m}^3$$