Reelle sin/cos - Fourier – Reihe

Dirichletsche – Bedingungen: Eine stetige periodische Signalfunktion f(t) mit der Periodenlänge T lässt sich durch eine trigonometrische Reihe ausdrücken. Auch bei Vorliegen von endlich vielen Unstetigkeiten ist das möglich, sofern alle Unstetigkeiten Sprungstellen sind:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

mit dem Gleichanteil $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$ (integraler Mittelwert)

den Kosinusanteilen $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\, dt$

den Sinusanteilen $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\, dt$

Anmerkungen:

- Die Integrationen können über beliebige Integrationsintervalle der Länge T durchgeführt werden $[t_0;\, t_0 + T]$
- Der Gleichanteil ist ggf. geometrisch (über Flächenbetrachtung) einfacher zu erhalten.
- Für den Spezialfall der Periodenlänge $T = 2\pi$ wird die Grund(kreis)frequenz ω=1.
- An ggf. vorhandenen Sprungstellen liefert die Fourier-Reihe den Mittelwert zwischen links- und rechtsseitigem Grenzwert, also die halbe Sprunghöhe.

Spezialfall: f(t) ist eine gerade Signalfunktion

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\, dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\, dt$$ und alle $b_n = 0$

Spezialfall: f(t) ist eine ungerade Signalfunktion

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\, dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\, dt$$ und alle $a_n = 0$

Reelle sin - Fourier – Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

mit den Amplituden $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (Amplitudenspektrum)

und den Phasen $\varphi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ für $b_n > 0$

(Phasenspektrum) $\varphi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right) + \pi$ für $b_n < 0$

$\varphi_n = \pi/2$ für $b_n = 0;\ a_n > 0$

$\varphi_n = -\pi/2$ für $b_n = 0;\ a_n < 0$

Reelle cos - Fourier – Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \cos(n\omega t + \tilde{\varphi}_n)$$

mit den selben Amplituden $\tilde{A}_n = A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ wie bei der sin-Fourierreihe, aber gegenüber dieser verschobenen Phasenlagen $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n - \frac{\pi}{2}$

Komplexe Fourierreihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

mit den komplexen Fourierkoeffizienten c_n, die sich entweder aus den reellen Fourierkoeffizienten berechnen lassen

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \qquad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}; \qquad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

oder aus der gegebenen Signalfunktion $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \qquad -\infty < n < \infty$