Grundlagen Taylorreihe

Ist eine Funktion $y=f(x)$ an einer Stelle x_0 beliebig oft differenzierbar und existieren die Funktionswerte der Ableitungen dort, so lässt sich die Funktion an x_0 in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad \left(\text{mit } f^{(0)} \mathrel{\hat{=}} f \text{ !!!}\right)$$

Speziell bei einer Entwicklung an der Stelle x_0 nennt man die Taylorreihe auch <u>Maclaurin-Reihe</u>:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Für Funktionen der Form $y=f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, erhält man die sogenannte <u>Binomische Reihe</u>:

$$f(x)=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\ldots$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

Für die Berechnung der Binomialkoeffizienten ist folgende auch für gebrochene Zahlen α gültige Vorschrift anzuwenden:

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots n}$$

→ Man schreibt also in den Nenner die n Faktoren von 1 bis n und in den Zähler ebenfalls n Faktoren, diese aber bei α beginnend und jeweils um 1 vermindert. Zweckmäßig ist eine sukzessive Berechnung wie folgt:

$$\binom{\alpha}{0}=1 \quad ; \quad \binom{\alpha}{1}=\alpha \quad ; \quad \binom{\alpha}{n}=\binom{\alpha}{n-1}\cdot\frac{(\alpha-n+1)}{n}$$

In manchen Fällen kann man die Binomische Reihe nach einer vorherigen Substitution benutzen, z.B.

$$y=f(x)=\left(1+x^2\right)^\alpha \qquad \text{Substitution } x^2=z$$

$$\rightarrow \quad y=f(z)=(1+z)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$$

Rücksubstitution $y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{2n}$

<u>Anmerkung:</u> Die Anwendbarkeit der Taylorreihe setzt ihre Konvergenz voraus. Dafür ist der sogenannte Konvergenzradius r zu bestimmen, was ggf. weitere Betrachtungen erfordert. Für die Binomische Reihe ist r=1, sodass diese Reihe nur für $-1<x<1$ konvergiert.