5.1 Grundlagen Extremwerte mit Nebenbedingungen

Ein Weg zur Lösung von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen besteht darin, die Nebenbedingungen nach geeigneten Variablen umzustellen und in die Zielfunktion so einzusetzen, dass sich dort die Anzahl der Variablen verringert.

Ein anderer Weg ist die Methode der Lagrange-Multiplikatoren:
Eine Funktion $f(x_1,\dots x_n,\lambda)$ soll minimiert oder maximiert werden (Zielfunktion).
Eine Nebenbedingung wird in der Form $g(x_1,\dots x_n)=0$ gebracht und mit λ multipliziert und zur ursprünglichen Zielfunktion addiert:

$$F(x_1,\dots x_n,\lambda)=f(x_1,\dots x_n)+\lambda\cdot g(x_1,\dots x_n) \qquad \text{(I)}$$

Damit haben F und f an derselben Stelle Extremwerte (der zweite Summand ist ja Null!). Die Extremwerte von F lassen sich durch das notwendige Kriterium:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{\partial F}{\partial x_2}=\dots=\frac{\partial F}{\partial x_n}=\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0 \qquad \text{(II)}$$

finden.

<u>Anmerkung 1:</u>
Beim Lösen des Gleichungssystems (II) mit $(n+1)$ Gleichungen wird man zuerst λ eliminieren, denn dem Lagrange-Multiplikator λ kommt hier keine Bedeutung zu.

<u>Anmerkung 2:</u>
Gibt es mehr als eine Nebenbedingung, so sind diese entsprechend mit mehreren Multiplikatoren $\lambda_1,\lambda_2,\dots$ einzubauen, z.B. 2 Nebenbedingungen:

$$g_1(x_1,\dots x_n)=0$$
$$g_2(x_1,\dots x_n)=0$$

$$F(x_1,\dots x_n,\lambda_1,\lambda_2)=f(x_1,\dots x_n)+\lambda_1\cdot g_1(x_1,\dots x_n)+\lambda_2\cdot g_2(x_1,\dots x_n)$$