6.1 Grundlagen Integralrechnung I

6.1.1 Allgemeines

Ein grundlegendes Anwendungsgebiet der Integralrechnung besteht in der Berechnung von Flächeninhalten unregelmäßiger Gebiete, die von Funktionskurven begrenzt werden. Es zeigt sich, dass dazu die Suche nach einer Stammfunktion $F(x)$ für eine vorgegebene Funktion $f(x)$ notwendig ist, was formal als unbestimmtes Integral ausgedrückt wird:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Es lässt sich beweisen, dass die erste Ableitung der gefundenen Stammfunktion wieder den sogenannten Integranden $f(x)$ liefern muss:

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

Anmerkung 1: Differenzieren und Integrieren sind daher einander entgegengesetzte mathematische Operationen.

Anmerkung 2: Addiert man zu einer gefundenen Stammfunktion eine beliebige Konstante, erhält man wieder eine Stammfunktion (die Konstante würde ja beim Differenzieren wegfallen). Dieser Tatsache ist bei einem unbestimmten Integral stets durch Aufschreiben der Integrationskonstante C Rechnung zu tragen, z.B. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

6.1.2 Folgende Grundintegrale sollte man auswendig kennen:

$$a) \int K \cdot dx = K \cdot x + C \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$b) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{R}, n \neq -1$$

$$c) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$d) \int e^x dx = e^x + C$$

$$e) \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$f) \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Wichtiger Spezialfall zu b) : $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

6.1.3 Linearitätsregel

Kennt man von zwei Funktionen f_1 und f_2 die zugehörigen Stammfunktionen F_1 und F_2 , so gilt bei beliebigen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) dx = \alpha \int f_1(x) dx + \beta \int f_2(x) dx$$
$$= \alpha F_1(x) + \beta F_2(x)$$

6.1.4 Lineare Substitution

Oft findet man als Integrand die Funktion eines Grundintegrals, aber nicht als Funktion $f(x)$ von x, sondern als Linearkombination $f(mx+n)$:

$$I = \int f(mx+n) dx$$

Dann empfiehlt es sich, die Linearkombination und das Differential wie folgt zu ersetzen:

$$z = mx + n \;\rightarrow \frac{dz}{dx} = m \;\rightarrow dx = \frac{1}{m} dz$$

$$\Rightarrow I = \int f(z) \cdot \frac{1}{m} dz = \frac{1}{m} \int f(z)\, dz$$

<u>Beispiel</u>:

$$I = \int \sin(3x + 4)\, dx$$

$$z = 3x + 4 \qquad \frac{dz}{dx} = 3 \qquad dx = \frac{1}{3} dz$$

$$I = \frac{1}{3} \int \sin(z)\, dz = -\frac{1}{3} \cos(z) + C$$

Rücksubstitution: $\int \sin(3x + 4)\, dx = -\frac{1}{3} \cos(3x + 4) + C$

<u>Anmerkung:</u> Auch ohne ausführliche Substitutionsschritte lässt sich das Ergebnis der linearen Substitution wie folgt merken:

$$\int f(mx + n)\, dx = \frac{1}{m} F(mx + n) + C$$

6.1.5 <u>Bestimmtes Integral</u>

Das bestimmte Integral in den Grenzen a und b berechnet sich mit der einmal gefundenen Stammfunktion $F(x)$ wie folgt:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$