Tutorium: GET III

Teil 1: Rechnen mit komplexen Zahlen

Claudius Sonntag

03.11.2014

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung komplexe Zahlen

1.1 Darstellungsformen

Die Darstellung von komplexen Zahlen kann für die Elektrotechnik in 3 Formen klassifiziert werden.

arithmetische Form	trigonometrische Form	Exponentialform
$\underline{z} = a + jb$	$\underline{z} = \lvert\underline{z}\rvert \cdot (\cos(\varphi) \pm j \cdot \sin(\varphi))$	$\underline{z} = \lvert\underline{z}\rvert \cdot e^{\pm j \cdot \varphi}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Addieren Subtrahieren Multiplizieren Dividieren	Diese Form dient der Kopplung, um Wechselsignale mit Sinus - oder Kosinusform einzubringen bzw. Ströme und Spannungen in dieser Form darzustellen.	Multiplizieren Dividieren Potenzieren Radizieren
$\downarrow$		$\downarrow$
Darstellung von Schaltungen mit komplexen Widerständen		Darstellung von komplexen Strömen, Spannungen und Widerständen
		$\downarrow$
		Anwendung des ohmschen Gesetzes

1.2 Umformung

Arithmetische Form $\rightarrow$ Expontentialform, trigonometrische Form

- $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$
- $\lvert\underline{z}\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exponentialform $\rightarrow$ trigonometrische Form

- Eulersche Beziehung
- $\cos(\varphi) \pm j \cdot \sin(\varphi) = e^{\pm j\varphi}$

trigonometrische Form $\rightarrow$ arithmetische Form

- $a = \lvert\underline{z}\rvert \cdot \cos(\varphi)$
- $b = \lvert\underline{z}\rvert \cdot \sin(\varphi)$

Eine graphische Darstellung von komplexen Zahlen ist ebenfalls möglich. Hierbei muss man sich die Gauß'sche Zahlenebene zu Hilfe machen.(siehe Tafel)

1.3 Addition(arithmetische Form)

$\underline{z_1} + \underline{z_2} = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$

Aufgabe 1:
Gegeben sind folgende komplexe Zahlen

$\underline{z_1} = 3 + 4j$
$\underline{z_2} = 2 + 8j$
$\underline{z_3} = 4 - 7j$
$\underline{z_4} = 8 - 3j$

Bitte ermitteln Sie folgende Ausdrücke: $\underline{z_1} + \underline{z_2}$, $\underline{z_2} + \underline{z_3}$, $\underline{z_3} + \underline{z_4}$
a) arithmetisch
b) graphisch

1.4 Subtraktion(arithmetische Form)

$\underline{z_1} - \underline{z_2} = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$

Aufgabe 2:
Gegeben sind die komplexen Zahlen aus Aufgabe 1. Bitte ermitteln Sie folgende Ausdrücke: $\underline{z_1} - \underline{z_2}$, $\underline{z_2} - \underline{z_3}$, $\underline{z_3} - \underline{z_4}$
a) arithmetisch
b) graphisch

1.5 Multiplikation(arithmetische Form)

$\underline{z_1} \cdot \underline{z_2} = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = a_1a_2 + ja_1b_2 + ja_2b_1 + j^2b_1b_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + j(a_1b_2 + a_2b_1)$

Aufgabe 3:
Gegeben sind die komplexen Zahlen aus Aufgabe 1. Bitte ermitteln Sie arithmetisch folgende Ausdrücke: $\underline{z_1} \cdot \underline{z_2}$, $\underline{z_2} \cdot \underline{z_3}$, $\underline{z_3} \cdot \underline{z_4}$

1.6 Division(arithmetische Form)

$\underline{Wichtiger Hinweis}$: Um eine arithmetische Division durchzuführen müssen Zähler und Nenner mit dem konjugiert komplexen erweitert werden.

$$\underline{z} = a \pm jb \longleftrightarrow \underline{z}^* = a \mp jb$$

$$\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} = \frac{a_1a_2 - ja_1b_2 + ja_2b_1 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Aufgabe 4:
Gegeben sind die komplexen Zahlen aus Aufgabe 1. Bitte ermitteln Sie arithmetisch folgende Ausdrücke: $\underline{z_1} : \underline{z_2}$, $\underline{z_2} : \underline{z_3}$, $\underline{z_3} : \underline{z_4}$

1.7 Multiplikation (Expnentialform)

$\underline{z_1} \cdot \underline{z_2} = |\underline{z_1}| \cdot |\underline{z_2}| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Aufgabe 5:
a) Bilden Sie die Exponentialform von den Ausdrücken aus Aufgabe 1.
b) Multiplizieren Sie mit Hilfe der Exponentialschreibweise.
c) Bilden Sie die arithmetische Form der Ergebnisse und geben Sie den Real- und den Imaginärteil.

1.8 Division (Exponentialform)

$$\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}} = \frac{|\underline{z_1}|}{|\underline{z_2}|} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Aufgabe 6:
a) Bilden Sie die Exponentialform von den Ausdrücken aus Aufgabe 1.
b) Dividieren Sie mit Hilfe der Exponentialschreibweise.
c) Bilden Sie die arithmetische Form der Ergebnisse und geben Sie den Real- und den Imaginärteil an.

1.9 Potenzieren (Exponentialform)

$\underline{z}^n = (|\underline{z}| \cdot e^{j\varphi})^n = |\underline{z}|^n \cdot e^{j\varphi n}$

$\underline{Wichtiger Hinweis}$: Beim Potenzieren mit kann es im Argument zu Winkeln kommen, die größer als 360° sind. Solche Winkel signalisieren einen oder mehrere Umläufe des Zeigers in der komplexen Ebene. Um einen Winkel im Bereich zwischen 0° und 360° zu erhalten, muss mit einem vielfachen von 360° addiert bzw. subtrahiert werden.

Aufgabe 7:
Berechnen Sie bitte folgende Ausdrücke und geben Sie die Ergebnisse in arithmetischer, trigonometrischer und in Exponentialform an.

a) $\underline{z}_1^7$, b) $\underline{z}_2^{-10}$, c) $\underline{z}_3^{15}$, d) $\underline{z}_4^{-16}$,

1.10 Radizieren (Exponentialform)

$\sqrt[n]{\underline{z}} = (|\underline{z}| \cdot e^{j\varphi + k360°})^{\frac{1}{n}} = |\underline{z}|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{j\varphi + k360°}{n}}$

$\underline{Wichtiger Hinweis}$: Durch da ziehen einer n-ten Wurzel, bekommt man immer n Lösungen. Im komplexen Zahlenbereich erhält man dadurch n Zeiger die alle um denselben Winkel voneinander entfernt sind. Die Lösungen lassen sich durch die Addition mit dem k-fachen von 360° im Argument ermitteln. Hierbei gilt.

$$k \in Z, \quad k = n - 1, \quad k = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

Aufgabe 8: Berechnen Sie bitte folgende Ausdrücke und geben Sie die Ergebnisse in arithmetischer, trigonometrischer und in Exponentialform an.

a) $\sqrt[7]{\underline{z_1}}$, b) $\sqrt[4]{\underline{z_3}}$,

1.11 Zusammenfassung

$\underline{z} = a + jb$

$\underline{z} = |\underline{z}| \cdot (\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$

$\underline{z} = |\underline{z}|e^{j\varphi}$

$Re\{\underline{z}\} = a = |\underline{z}|\cos(\varphi)$

$Im\{\underline{z}\} = b = |\underline{z}|\sin(\varphi)$

$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\varphi = \arctan(\frac{b}{a}) \qquad + 180^\circ \ wenn \ a < 0$$

$$e^{j0} = 1 = j^0$$

$$e^{j\pi} = -1 = j^2$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j = j^1$$

$$e^{j\frac{3}{2}\pi} = -j = j^3$$

$$\sin\varphi = \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$\cos\varphi = \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin\varphi = \frac{(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})}{2j}$$

$$\cos\varphi = \frac{(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})}{2}$$