M. Sc. Petra Clauß
Mathematische Grundlagen und Analysis

Wintersemester 2015/16
13. Oktober 2015

LÖSUNGEN
Lineare und Quadratische Gleichungen, Gleichungen höheren Grades

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit der Unbekannten $x, r \in \mathbb{R}$ ggf. in Abhängigkeit der unbestimmten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$:

a) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

Lösung. $\mathbb{D}=\mathbb{R} \qquad \mathbb{L}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) $x-[(4x+4,5)+3,5]=2,5-(3,5-4x)$

Lösung. $\mathbb{D}=\mathbb{R} \qquad \mathbb{L}=\{-1\}$

c) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{5x}{6}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{x}{2}+x$

Lösung. $\mathbb{D}=\mathbb{R} \qquad \mathbb{L}=\{2\}$

d) $\dfrac{10x}{6}-\dfrac{8x}{9}=4\dfrac{2}{3}$

Lösung. $\mathbb{D}=\mathbb{R} \qquad \mathbb{L}=\{6\}$

e) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}$

Lösung. $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;1;2\} \qquad \mathbb{L}=\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$

f) $\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{6}{2x-5}+\dfrac{4}{3x-5}=\dfrac{1}{3x-5}$

Lösung. $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{2};5\right\} \qquad \mathbb{L}=\{1\}$

g) $\dfrac{a+x}{b-x}-\dfrac{b-x}{a+x}=\dfrac{2a^2-2b^2}{ab-ax+bx-x^2}$

Lösung. $\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}|x\neq -a; x\neq b\} \qquad \mathbb{L}=\left\{\dfrac{a-b}{2}\right\}$

h) $2(1+r)-(1+2r)+1=0$

Lösung. $\mathbb{D}=\mathbb{R} \qquad \mathbb{L}=\emptyset$

i) $\dfrac{bx-a}{a}+b=bx-1$

Lösung. $\mathbb{D}=\mathbb{R}$
$\mathbb{L}=\left\{\dfrac{a}{(a-1)}\right\}$ für $b\neq 0$ und $a\neq 1$
$\mathbb{L}=\mathbb{R}$ für $b=0$
$\mathbb{L}=\emptyset$ für $a=1$ und $b\neq 0$

j) $\dfrac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$

Lösung. $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\} \qquad \mathbb{L}=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

k) $(2x+1)^2=\left(\dfrac{5x}{2}+8\right)^2-\left(\dfrac{3x^2}{2x}+9\right)^2$

Lösung. $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \mathbb{L}=\{2\}$

Aufgabe 2. Eine Mauer lässt sich aus 54 Reihen Ziegelsteinen der Höhe x herstellen. Nimmt der Maurer um $1,6$ cm höhere Steine, so braucht er nur 45 Reihen. Berechnen Sie die Höhe x.

Lösung. Die Höhe beträgt $x=8$ cm.

Aufgabe 3. Drei Geschwister sind zusammen 21 Jahre alt. A ist doppelt so alt wie B und C nur halb so alt wie B. Wie alt ist jedes der Geschwister?

Lösung. Die Geschwister sind 12, 6 und 3 Jahre alt.

Aufgabe 4. Zwei Autofahrer A und B fahren täglich mit dem Wagen zur Arbeit. A legt in der Stunde durchschnittlich 54 km, B 72 km zurück. Wie viel Minuten nach Aufbruch von B werden sie sich treffen, wenn A 7 min früher losfährt und beide den gleichen Weg fahren?

Lösung. Sie treffen sich nach 21 Minuten.

Aufgabe 5. Drei Freunde haben zusammen 350 GE gespart. A hat doppelt so viel wie B und C nur halb so viel wie B gespart. Wie viel GE hat jeder gespart?

Lösung. A hat 200 GE, B hat 100 GE und C hat 50 GE gespart.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit der Unbekannten $x \in \mathbb{R}$ ggf. in Abhängigkeit des unbestimmten Koeffizienten $a \in \mathbb{R}$:

a) $2x^2 - 11x - 6 = 0$

Lösung. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{2}; 6\right\}$

b) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$

Lösung. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{L} = \{2\}$

c) $-x^2 + x = \frac{1}{2}$

Lösung. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{L} = \emptyset$

d) $\frac{2x+1}{3x-4} = \frac{x+6}{4x+1}$

Lösung. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}; \frac{4}{3}\right\} \qquad \mathbb{L} = \emptyset$

e) $\frac{x^2-2}{x^2-2x} = \frac{x+2}{x} + \frac{x-1}{x-2}$

Lösung. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\} \qquad \mathbb{L} = \{-1\}$

f) $3 - \frac{1}{x} = \frac{2}{x-4}$

Lösung. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\} \qquad \mathbb{L} = \left\{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{59}{12}}, \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{59}{12}}\right\}$

g) $(1+x)(2+x)(3+x) + (1-x)(2-x)(3-x) = 120$

Lösung. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{L} = \{-3; 3\}$

h) $2x^2 + x - 3a = 0$

Lösung. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1+24a}; -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{1+24a}\right\}$ für $a > -\frac{1}{24}$
$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ für $a = -\frac{1}{24}$
$\mathbb{L} = \emptyset$ für $a < -\frac{1}{24}$

i) $ax^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{1+3a}; -\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{1+3a}\right\}$ für $a > -\frac{1}{3}$
$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{a}\right\}$ für $a = -\frac{1}{3}$
$\mathbb{L} = \emptyset$ für $a < -\frac{1}{3}$

j) $x^2 - ax + a = x$

Lösung. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{L} = \{1, a\}$ für $a \neq 1$
$\mathbb{L} = 1$ für $a = 1$

Aufgabe 7. Bei einem Sportplatz von $7000m^2$ Größe verhalten sich Länge zur Breite wie 3 : 2. Bestimmen Sie die Länge und die Breite des Sportplatzes.

Lösung. Der Sportplatz ist etwa 102,47 Meter lang und 68,31 Meter breit.

Aufgabe 8. Die Diagonale eines Quadrates ist 8cm lang. Wie lang ist die Seite des Quadrates?

Lösung. Die Seite des Quadrates ist $4\sqrt{2}$ cm lang.

Aufgabe 9. Zwei Zahlen unterscheiden sich um 4.
Das Produkt der beiden Zahlen beträgt 480.
Bestimmen Sie die beiden Zahlen.

HOCHSCHULE SCHMALKALDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Lösung. Die beiden Zahlenpaare $(-24; -20)$ und $(20; 24)$ erfüllen die Bedingungen.

Aufgabe 10. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit der Unbekannten $x \in \mathbb{R}$ ggf. in Abhängigkeit des unbestimmten Koeffizienten $k \in \mathbb{R}$:

a) $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$

Lösung. $\mathbb{L} = \{-6; -2; 4\}$

b) $\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - 3x = -9$

Lösung. $\mathbb{L} = \{-2; 2; 3\}$

c) $-2x^3 + 6x^2 + 4x = \frac{1}{2}x - 1$

Lösung.$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

d) $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$

Lösung. $\mathbb{L} = \{1\}$

e) $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

Lösung. $\mathbb{L} = \left\{\frac{2}{3}; 2\right\}$

f) $x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = 0$

Lösung. $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$

g) $x^4 - 4x^3 + \frac{15}{4}x^2 + x - 1 = 0$

Lösung. $\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right\}$

h) $(x^2 - 1)(x^2 - 3k) = 0$

Lösung. Fallunterscheidung:
$k > 0 \qquad \mathbb{L} = \left\{-1; -\sqrt{3k}; 1; \sqrt{3k}\right\}$

$k = 0 \qquad \mathbb{L} = \{-1; 0; 1\}$
$k < 0 \qquad \mathbb{L} = \{-1; 1\}$

i) $(x + k)^2(x^2 - 2x + 2k) = 0$

Lösung. Fallunterscheidung:
$k = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{L} = \{-k; 1\}$
$k < \frac{1}{2} \qquad \mathbb{L} = \left\{-k; 1 + \sqrt{1 - 2k}; 1 - \sqrt{1 - 2k}\right\}$
$k > \frac{1}{2} \qquad \mathbb{L} = \{-k\}$

Aufgabe 11. $K(x) = x^3 - 31x^2 + 2070x + 852$ stellt die Gesamtkosten für die Herstellung der Menge x eines Produktes dar. Welche Menge muss produziert und zu einem Stückpreis von 2000 GE verkauft werden, damit ein Gewinn von 1500 GE erzielt wird.

Lösung. Für einen Gewinn von 1500 GE müssen $x = 14$ bzw $x = 24$ Stück verkauft werden.

Aufgabe 12. Die Entwicklung der installierten Leistung von Windkraftanlagen in Deutschland seit 2006 lässt sich näherungsweise mit der Funktion

$$P(x) = \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{3}x + 21$$

beschreiben. Die Variable x steht für die Jahre, $P(x)$ für Gigawatt (GW).

a) Welche Leistung war 2006 installiert?

Lösung. 2006 betrug die installierte Leistung etwa 21 Gigawatt.

b) Welche Leistung war 2013 installiert?

Lösung. 2013 betrug die installierte Leistung ca. 33,69 Gigawatt.

c) In welchem Jahr kann unter gleichen Voraussetzungen mit einer installierten Leistung von 46 GW gerechnet werden?

Lösung. 2016 kann mit einer Leistung von 46 GW gerechnet werden.