M. Sc.Petra Clauß
Mathematische Grundlagen und Analysis

Wintersemester 2015/16
24. November 2015

LÖSUNGEN
Kurvendiskussion

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen folgender Funktionen an der angegebenen Stelle:

a) $f(x) = -2x^2 + 6x - 9 \qquad \text{an } x_0 = 2$
Lösung.
$T(x) = -2x - 1$

b) $f(x) = x\sqrt{2x-1} + \dfrac{e^x}{\ln x} \qquad \text{an } x_0 = 3$
Lösung.
$T(x) = 16,32x - 23,97$

c) $C(t) = \sqrt[3]{t^4} - (6t+1)\sqrt[3]{t} \qquad \text{an } t_0 = 1,5$
Lösung.
$T(t) = -7,885t + 2,100$

d) $h(s) = se^{-3s} \qquad \text{an } s_0 = 4$
Lösung.
$T(s) = -0,0000676s + 0,0002949$

Aufgabe 2. Untersuchen Sie das Steigungsverhalten folgender Funktionen:

a) $f(x) = -12x^2 + 8x + 4$
Lösung.

	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonie	steigt		fällt

b) $f(t) = t \ln t$
Lösung.

	$\left(0; \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
Monotonie	fällt		steigt

c) $f(x) = (x^2 + 4)e^{-(x+3)}$
Lösung.
$f'(x) = (-x^2 + 2x - 4)\frac{1}{e^{(x+3)}}$
Der Faktor $\frac{1}{e^(x + 3)}$ ist immer positiv für alle $x \in \mathbb{D}$, der Faktor $(-x^2+2x-4)$ ist immer negativ. Also ist $f'(x)$ überall fallend.

d) $u(s) = \frac{s-1}{s^2 + s + 4}$
Lösung.

	$(-\infty; 1-\sqrt{6})$	$1-\sqrt{6}$	$(1-\sqrt{6}; 1+\sqrt{6})$	$1+\sqrt{6}$	$(1+\sqrt{6}; +\infty)$
$u'(s)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonie	fällt		steigt		fällt

Aufgabe 3. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten folgender Funktionen:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x + 5$
Lösung.

	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Krümmumg	rechtsgekrümmt		linksgekrümmt

b) $f(t) = \frac{t^2 + 1}{t - 1}$
Lösung.

	$(-\infty; 1)$	$(1; +\infty)$
$f''(t)$	$-$	$+$
Krümmumg	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

c) $h(z) = z^2 e^{-z}$
Lösung.

	$(-\infty; 2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2}; +\infty)$
$h''(z)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Krümmumg	linksgekrümmt		rechtsgekrümmt		linksgekrümmt

d) $g(u) = u^2 \ln u$
Lösung.

	$\left(0; e^{-\frac{3}{2}}\right)$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$\left(e^{-\frac{3}{2}}; +\infty\right)$
$g''(u)$	$-$	0	$+$
Krümmumg	rechtsgekrümmt		linksgekrümmt

Aufgabe 4. Diskutieren Sie an Hand des in der Vorlesung gegebenen Schemas zur Kurvendiskussion die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = e^{-x^2}$
Lösung.

1. Definitionsbereich:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

2. Symmetrie:
$f(x)$ ist gerade (Symmetrisch zur y-Achse)
3. Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse:
$f(x)$ besitzt keine Nullstellen
Schnittpunkt mit der y-Achse im Punkt $(0|1)$
4. Pole:
$f(x)$ besitzt keine Pole
5. Ableitungen:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$
$$f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$
$$f'''(x) = e^{-x^2}(4x(3 - 2x^2))$$

6. Extremastellen, Monotonieverhalten:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonie	steigt	HP	fällt

7. Wendepunkte, Krümmungsverhalten:

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}; \infty\right)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Krümmung	linksgekrümmt	WP	rechtsgekrümmt	WP	linksgekrümmt

8. Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$:

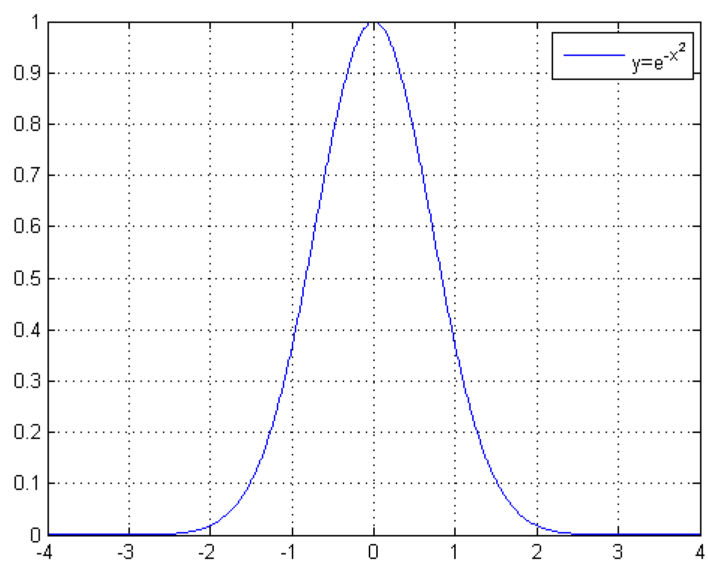
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$\Rightarrow f_A(x) = 0$ ist eine waagrechte Asymptote

9. Wertebereich:

$$W_f = (0; 1]$$

10. Skizze:



b) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+3)^2}$

Lösung.

1. Definitionsbereich:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

2. Symmetrie:
   $f(x)$ ist nicht symmetrisch

3. Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$S_1(-2|0) \qquad S_2(1|0)$$

   Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_3\left(0|-\dfrac{2}{9}\right)$

4. Pole:
   $x = -3$ ist eine Polstelle und somit eine senkrechte Asymptote bei $x = -3$

5. Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{5x+7}{(x+3)^3}$$

$$f''(x) = -\frac{10x+6}{(x+3)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{6(5x-1)}{(x+3)^5}$$

6. Extremastellen, Monotonieverhalten:

x	$(-\infty; -3)$	$(-3; -1,4)$	$-1,4$	$(-1,4; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
Monotonie	steigt	fällt	TP	steigt

7. Wendepunkte, Krümmungsverhalten:

x	$(-\infty; -3)$	$(-3; -0,6)$	$-0,6$	$(-0,6; \infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$
Krümmung	linksgekrümmt	linksgekrümmt	WP	rechtsgekrümmt

8. Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$:

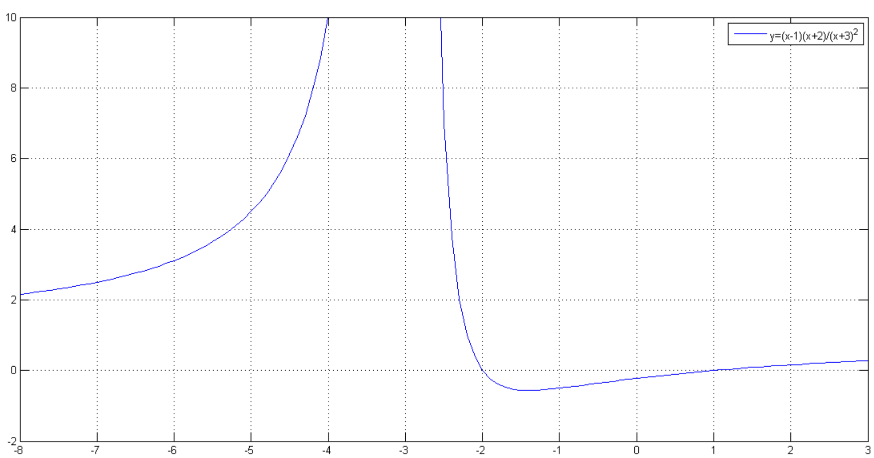
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

$\Rightarrow f_A(x) = 1$ ist eine waagrechte Asymptote

9. Wertebereich:

$$W_f = (-0,5625; \infty)$$

10. Skizze:



c) $f(x) = (1 - e^{-2x})^2$
Lösung.

1. Definitionsbereich:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

2. Symmetrie:
$f(x)$ ist nicht symmetrisch.

3. Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse:
$f(x)$ hat bei $x_1 = 0$ eine Nullstelle
Schnittpunkt mit der y-Achse im Punkt $(0|0)$

4. Pole:
$f(x)$ besitzt keine Polstelle

5. Ableitungen:

$$f'(x) = e^{-4x}\left(4e^{2x} - 4\right)$$
$$f''(x) = -e^{-4x}\left(8e^{2x} - 16\right)$$
$$f'''(x) = e^{-4x}\left(16e^{2x} - 64\right)$$

6. Extremastellen, Monotonieverhalten:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Monotonie	fällt	TP	steigt

7. Wendepunkte, Krümmungsverhalten:

x	$(-\infty; 0,347)$	$0,347$	$(0,347; \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Krümmung	linksgekrümmt	WP	rechtsgekrümmt

8. Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$:

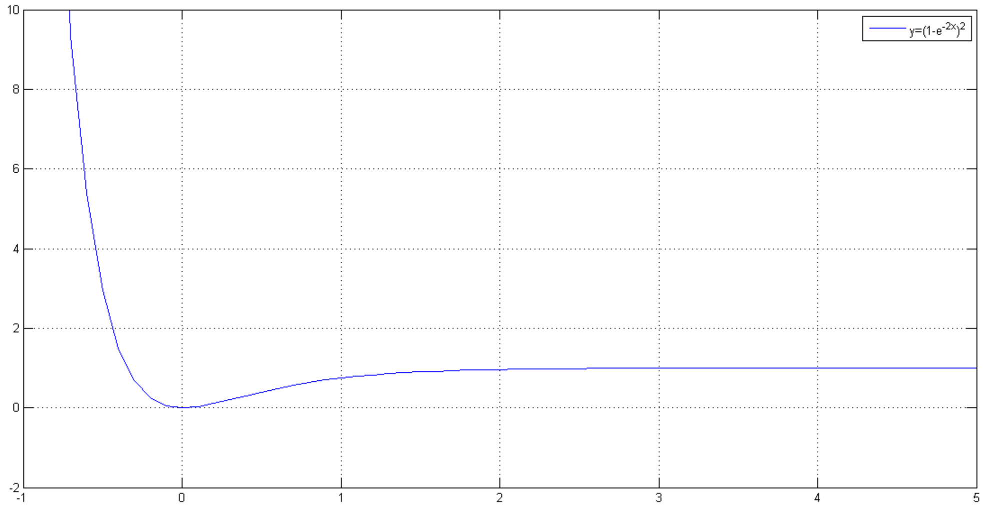
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

$\Rightarrow f(x)$ hat bei $f_A(x) = 1$ eine waagrechte Asymptote

9. Wertebereich:

$$W_f = [0; \infty)$$

10. Skizze:



d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$

Lösung.

1. Definitionsbereich:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

2. Symmetrie:
   $f(x)$ ist nicht symmetrisch

3. Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse im Punkt:
   $f(x)$ besitzt keine Nullstellen
   Schnittpunkt mit der y-Achse im Punkt $\left(0 \middle| -\dfrac{1}{3}\right)$

4. Pole:
   $x = 3$ ist eine Polstelle und somit eine senkrechte Asymptote bei $x = 3$

5. Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{20}{(x-3)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{60}{(x-3)^4}$$

6. Extremastellen, Monotonieverhalten:

x	$(-\infty; -0,162)$	$-0,162$	$(-0,162; 3)$	$(3; 6,162)$	$6,162$	$(6,162; \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
Monotonie	steigt	HP	fällt	fällt	TP	steigt

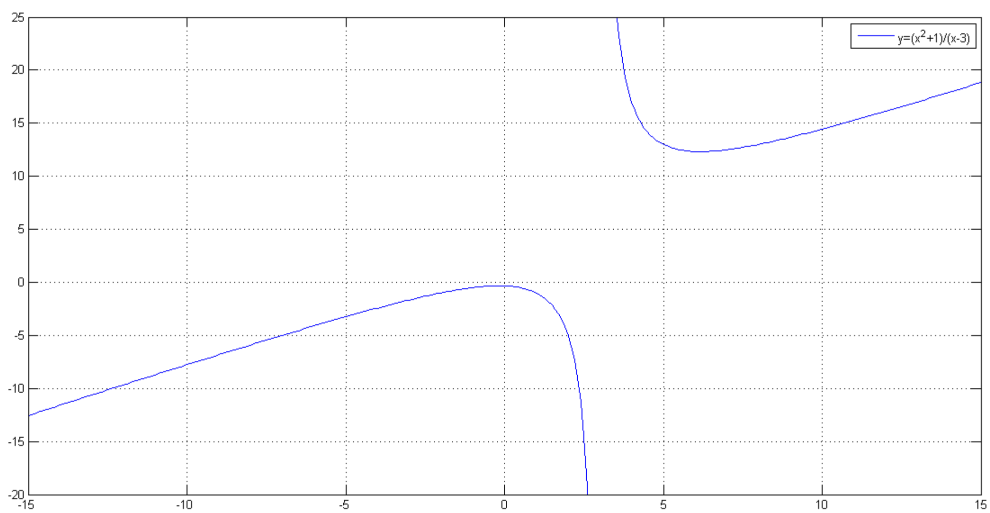
7. Wendepunkte, Krümmungsverhalten:

x	$(-\infty; 3)$	$(3; \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
Krümmung	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

8. Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$:
   $f_A(x) = x + 3$ Asymptote im Unendlichen
9. Wertebereich:

$$W_f = (-\infty; -0,325] \cup [12,325; \infty)$$

10. Skizze:



e) $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{9 - x^2}$
Lösung.

1. Definitionsbereich:

$$\mathbb{D} = [-3; 3]$$

2. Symmetrie:
   $f(x)$ ist nicht symmetrisch

3. Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse im Punkt:
   $f(x)$ hat bei $x_1 = -2,683$ eine Nullstelle
   Schnittpunkt mit der y-Achse im Punkt $(0|3)$

4. Pole:
   $f(x)$ besitzt keine Polstelle

5. Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$
$$f''(x) = -\frac{9}{(9 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$f'''(x) = -\frac{27}{(9 - x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

6. Extremastellen, Monotonieverhalten:

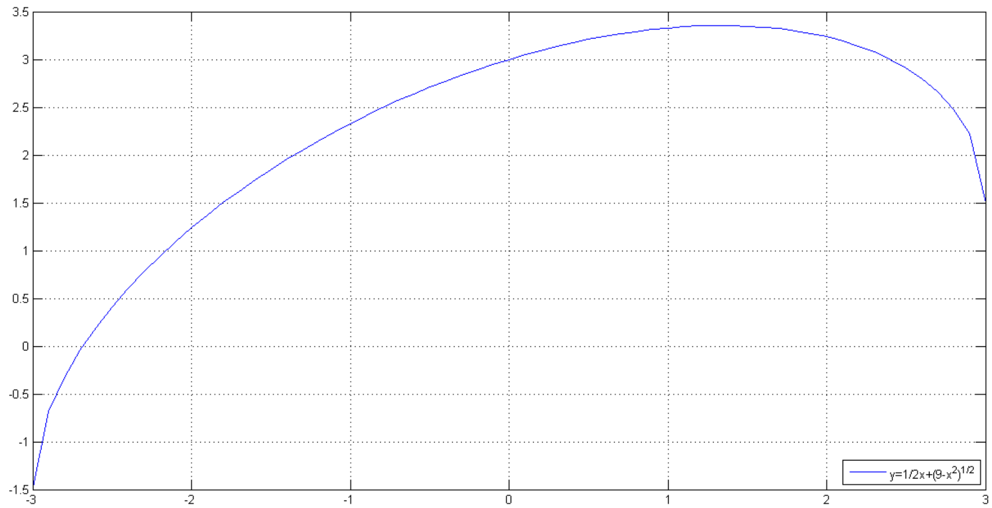
x	$(-3; 1,342)$	$1,342$	$(1,342; 3)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonie	steigt	HP	fällt

7. Wendepunkte, Krümmungsverhalten:
   $f(x)$ ist auf dem gesamten Definitionsbereich rechtsgekrümmt

8. Wertebereich:

$$W_f = [-1,5; 3,354]$$

9. Skizze:



f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Lösung.

1. Definitionsbereich:

$$\mathbb{D} = (0; \infty)$$

2. Symmetrie:
   $f(x)$ ist nicht symmetrisch

3. Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse im Punkt:
   $f(x)$ hat bei $x_1 = 1$ eine Nullstelle
   Es gibt keinen Schnittpunkt mit der y-Achse

4. Pole:
   $x = 0$ ist Polstelle

5. Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-3 + 2\ln(x)}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{11 - 2\ln(x)}{x^4}$$

6. Extremastellen, Monotonieverhalten:

x	$(0;e)$	e	$(e;\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonie	steigt	HP	fällt

7. Wendepunkte, Krümmungsverhalten:

x	$\left(0;e^{\frac{3}{2}}\right)$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\left(e^{\frac{3}{2}};\infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Krümmung	rechtsgekrümmt	WP	linksgekrümmt

8. Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$:

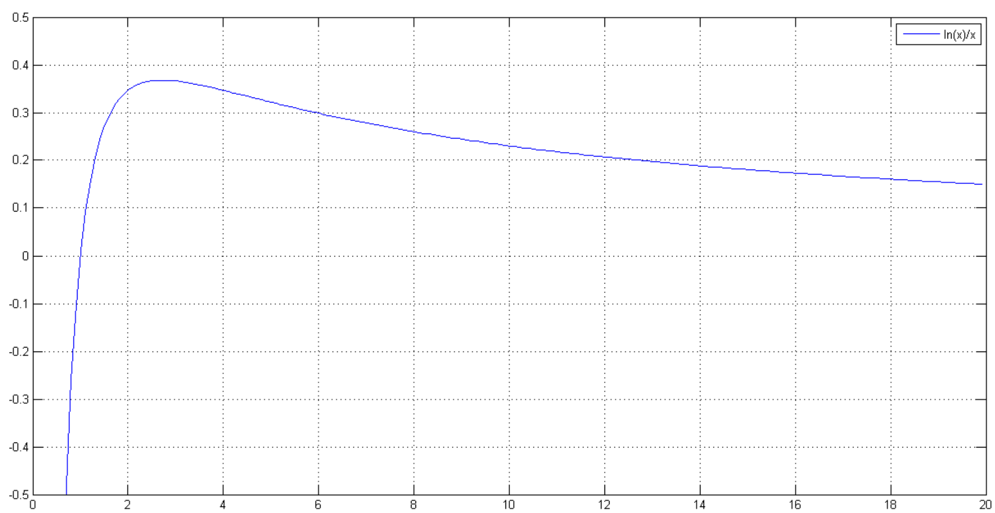
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ besitzt bei $f_A(x) = 0$ eine waagrechte Asymptote

9. Wertebereich:

$$W_f = (-\infty; 0,368]$$

10. Skizze:



Aufgabe 5. Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = x^3 - 3x^2 - ax + 24$

a) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Funktion eine Nullstelle für $x = 1$ hat.

Lösung.
$a = 22$

b) Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f_{22}(x)$.
Lösung.
Hochpunkt $\left(1+\frac{5\sqrt{3}}{3}; -48,11\right)$
Tiefpunkt $\left(1-\frac{5\sqrt{3}}{3}; 48,11\right)$

Aufgabe 6. Besitzen nachstehende Funktionen Asymptoten, wenn ja sind sie zu bestimmen

a) $f(x) = \frac{2x^4 - x^3}{x^2 - 1}$
Lösung.
$f(x)$ hat eine Asymptote $f_A(x) = 2x^2 - x + 2$ und zwei senkrechte Asymptoten bei $x = 1$ und $x = -1$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 3}$
Lösung.
$f(x)$ hat eine waagrechte Asymptote bei $f_A(x) = 1$

c) $f(x) = x^2 e^{-x}$
Lösung.
$f(x)$ hat die x-Achse als Asymptote

Aufgabe 7. Gegeben sind die Funktion f durch $f(x) = \frac{5}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$ mit $-\frac{1}{4} \leq x \leq 8$ und die Gerade g durch $y = -\frac{1}{3}x + 2$.
Die Gerade g schneidet den Graphen von f in den Punkten A und B. Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte.

Lösung. Schnittpunkte : $A(0|2)$ und $B(6|0)$