

Grenzwerte und Stetigkeit

Aufgabe 1. Untersuchen Sie das Grenzverhalten:

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 3}$ | f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 5}{2x^3 - x + 9}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 7x^2 + 7x + 4}{-x^3 + 3x^2 + x - 4}$ | g) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x - 5}{x + 5} \cdot \frac{25 - x^2}{x^2} \right)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 9}{-2x + 7}$ | h) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 2}{x - 2}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{1 - e^{-2x}}$ | i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3 + x^2}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 4}{e^x + 2}$ | j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x + 2)$ |

Aufgabe 2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 7x + 3)$ | f) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2}$ | g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{1 + x}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x + 1}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ | i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{x - 3\sqrt{x}}$ |

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktion an den Rändern ihres Definitionsbereichs:

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1}$ | c) $f(x) = -e^{2x} \cdot x^3$ |
| b) $f(x) = -3 \ln(x) + x^2$ | d) $f(x) = \frac{1}{2^x} \left(4x^3 + \frac{5}{x^3} \right)$ |

Aufgabe 4. Untersuchen Sie $f(x)$ auf Stetigkeit:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = e^{x^2-2x+3} & \text{d) } f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \\ \text{b) } f(x) = \ln(x^2-1) & \text{e) } f(x) = \frac{1-x}{1-|x|} \\ \text{c) } f(x) = \frac{x^2+3x+5}{\sqrt{x^2+1}} & \end{array}$$

Aufgabe 5. Untersuchen Sie $f(x)$ auf Stetigkeit an der angegebenen Stelle:

$$\begin{array}{l} \text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ an der Stelle } x_0 = 0 \\ \text{b) } f(x) = 2|x| \text{ an der Stelle } x_0 = 0 \\ \text{c) } f(x) = e^{\frac{1}{x}} \text{ an der Stelle } x_0 = 0 \\ \text{d) } f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ an der Stelle } x_0 = -1 \end{array}$$

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & x < 2 \\ a^2(x+2) & x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so dass $f(x)$ in $x = 2$ stetig ist.

Aufgabe 7. Bestimmen Sie den $\lim_{x \rightarrow \infty}$ von $f(x)$, $g(x)$ und $f(x) + g(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \quad g(x) = -x$$