

LÖSUNGEN

Grenzwerte und Stetigkeit

Aufgabe 1. Untersuchen Sie das Grenzverhalten:

a) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 3} = 2$$

b) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 7x^2 + 7x + 4}{-x^3 + 3x^2 + x - 4} = -3$$

c) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 9}{-2x + 7} = -\frac{5}{2}$$

d) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{1 - e^{-2x}} = 5$$

e) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 4}{e^x + 2} = 2$$

f) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 5}{2x^3 - x + 9} = 0$$

g) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x - 5}{x + 5} \cdot \frac{25 - x^2}{x^2} \right) = -1$$

h) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 2}{x - 2} = \pm\infty$$

i) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3 + x^2} = 0$$

j) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x + 2) = -\infty$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 7x + 3) = -3$$

b) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

c) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \infty$$

d) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

e) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} = -2$$

f) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = 12$$

g) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{1 + x} = -4$$

h) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = 2$$

i) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

j) **Lösung.**

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{9-x}{x-3\sqrt{x}} = -2$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktion an den Rändern ihres Definitionsbereichs:

a) $f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1}$

Lösung.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1} = 3$$

b) $f(x) = -3 \ln(x) + x^2$

Lösung.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 \ln(x) + x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -3 \ln(x) + x^2 = +\infty$$

c) $f(x) = -e^{2x} \cdot x^3$

Lösung.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{2x} \cdot x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{2x} \cdot x^3 = 0$$

d) $f(x) = \frac{1}{2^x} \left(4x^3 + \frac{5}{x^3} \right)$

Lösung.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} \left(4x^3 + \frac{5}{x^3} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2^x} \left(4x^3 + \frac{5}{x^3} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2^x} \left(4x^3 + \frac{5}{x^3} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^x} \left(4x^3 + \frac{5}{x^3} \right) = +\infty$$

Aufgabe 4. Untersuchen Sie $f(x)$ auf Stetigkeit:

a) $f(x) = e^{x^2-2x+3}$

Lösung. $f(x) = e^{x^2-2x+3}$ ist stetig

b) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

Lösung. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ ist für alle Stellen außerhalb des abgeschlossenen Intervalls $[-1; 1]$ stetig.

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Lösung. $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig.

d) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

Lösung. $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ ist nicht stetig.

e) $f(x) = \frac{1-x}{1-|x|}$

Lösung. $f(x) = \frac{1-x}{1-|x|}$ ist nicht stetig.

Aufgabe 5. Untersuchen Sie $f(x)$ auf Stetigkeit an der angegebenen Stelle:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$

Lösung. $f(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig.

b) $f(x) = 2|x|$ an der Stelle $x_0 = 0$

Lösung. $f(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ an der Stelle $x_0 = 0$

Lösung. $f(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig

d) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = -1$

Lösung. $f(x)$ ist an der Stelle $x_0 = -1$ stetig.

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & x < 2 \\ a^2(x + 2) & x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so dass $f(x)$ in $x = 2$ stetig ist.

Lösung. Für $a = 4$ oder $a = -2$ ist die Funktion $f(x)$ stetig.

Aufgabe 7. Bestimmen Sie den $\lim_{x \rightarrow \infty}$ von $f(x)$, $g(x)$ und $f(x) + g(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \quad g(x) = -x$$

Lösung.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + g(x) = -1$$