M. Sc.Petra Clauß
Mathematische Grundlagen und Analysis

Wintersemester 2015/16
15. Dezember 2015

LÖSUNGEN
Extremwertaufgaben für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Aufgabe 1. Betrachtet wird ein Unternehmen, das zwei verschiedene Produkte A und B herstellt. Dabei wird angenommen, dass die Gesamtkosten K zur Herstellung von x Einheiten von Produkt A sowie y Einheiten von Produkt B durch eine Funktion mit Zuordnungsvorschrift

$$K(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 10x + 15$$

beschrieben werden und die gesamte Produktion zu Preisen von 8 Euro für Produkt A und 6 Euro für Produkt B abgesetzt werden kann

a) Stellen Sie die Erlösfunktion $E(x, y)$ und die Gewinnfunktion $G(x, y)$ des Unternehmens auf.
Lösung.

$$E(x, y) = 8x + 6y$$
$$G(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy + 18x + 6y - 15$$

b) Bestimmen Sie die gewinnmaximierenden Produktionsmengen x und y sowie den maximalen Gewinn.
Lösung.
Für $x = 21$ und $y = 12$ wird ein maximaler Gewinn von 120 Euro erzielt.

Aufgabe 2. Betrachtet wird die reellwertige Funktion

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - y^2$$

Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen von f. Geben sie an, ob es sich bei den lokalen Extremalstellen um globale Extremalstellen handelt.

Lösung.
lokale Maximalstellen bei $(0, 0)$, lokale Minimalstelle $(-1, 0)$ und $(1, 0)$
Sattelpunkte bei $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
globale Minimalstelle $(-1, 0)$ und $(1, 0)$

Aufgabe 3. Die Summe zweier Zahlen sei 20. Bestimme die Zahlen so, dass

a) die Summe ihrer Quadrate minimal,
Lösung.
Für die Zahlen $a = 10$ und $b = 10$ die die Summe ihrer Quadrate minimal.

b) das Produkt der einen mit der dritten Potenz der anderen maximal wird.
Lösung.
$a = 5$ und $b = 15$

Aufgabe 4. Untersuchen Sie, ob es sich bei $\left(3, -2, -\frac{1}{2}\right)$, $(3, -1, 0)$ und $\left(3, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ um stationäre Stellen der Funktion

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + 4xz - 6z$$

unter den beiden Nebenbedingungen

$$x + y - z = 2 \qquad \text{und} \qquad x - y + z = 4$$

handelt.

Lösung.
$\left(3, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ist eine stationäre Stelle von f unter den beiden Gleichheitsnebenbedingungen.

Aufgabe 5. Betrachtet wird ein Haushalt mit der Nutzenfunktion

$$U(x, y) = -3x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 12x + 7y + 16$$

unter der Budgetrestriktion

$$6x + 3y = 48$$

Wie viel Einheiten der Güter x und y wird der Haushalt konsumieren, wenn er seinen Nutzen maximieren will, dabei aber der oben genannten Budgetrestriktion unterliegt?
Wie hoch ist dieser maximale Nutzen?

Lösung.
Für $x = 3$ und $y = 10$ ergibt sich ein maximaler Nutzen von 45.

Aufgabe 6. Ein Unternehmen produziert drei Güter mit den Stückzahlen x_1, x_2 und x_3. Die zugehörigen Preis-Absatz-Funktionen sind gegeben durch

$$p_1(x_1) = 100 - x_1, \qquad p_2(x_2) = 50 - x_2, \qquad p_3(x_3) = 150 - x_3$$

Die Produktion ist betriebstechnisch restringiert durch die Nebenbedingung

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 70$$

a) Bestimmen Sie die Zuordnungsvorschrift der Umsatzfunktion $U(x_1, x_2, x_3)$ des Unternehmens
Lösung.

$$U(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 100x_1 + 50x_2 + 150x_3$$

b) Ermitteln Sie die umsatzmaximierenden Produktionsmengen und den maximalen Umsatz unter der Nebenbedingung
Lösung.
Für $x_1 = 10, x_2 = 5, x_3 = 15$ ergibt sich der maximale Umsatz von 3150.

Aufgabe 7. Betrachtet wird ein Anleger, der ein Portfolio aus drei zur Auswahl stehenden Wertpapieren bilden möchte. Dabei möchte er die Wertpapieranteile x, y und z so wählen, dass die erwartete Rendite r beträgt und das mit dem Portfolio verbundene Investitionsrisiko minimiert wird. Die erwarteten Renditen der drei Wertpapiere betragen $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ und $\frac{3}{10}$, und das Risiko des Portfolio wird durch die reellwertige Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{20}y^2 + \frac{1}{20}z^2$$

quantifiziert.

a) Geben Sie das Optimierungsproblem in mathematischer Form an und interpretieren Sie es.
Lösung.
Es ist die Minimalstelle der Funktion f unter den beiden Gleichheitsnebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = \frac{1}{10}x + \frac{2}{10}y + \frac{3}{10}z - r = 0 \qquad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$$

zu bestimmen. Die erste Gleichheitsnebenbedingung stellt sicher, dass die erwartete Gesamtrendite des Portfolios r beträgt. Die zweite Gleichheitsnebenbedingung drückt aus, dass der Anleger sein gesamtes Kapital auf die drei Anlageformen verteilt.

b) Ermitteln Sie das Minimum der Risikofunktion f unter den gegebenen Nebenbedingungen in Abhängigkeit von der erwarteten Rendite r.
Lösung.
Für $x = -5r + \frac{4}{3}, y = \frac{1}{3}, z = 5r - \frac{2}{3}$ ergibt sich das Minimum der Risikofunktion bei $\frac{5}{2}r^2 - r + \frac{7}{60}$

Aufgabe 8. Ein Sportler möchte seine Leistungsfähigkeit verbessern. Dazu kann er die Ausdauer bzw. die Beweglichkeit trainieren. Bezeichnet man mit x die Anzahl seiner absolvierten Trainingseinheiten für Ausdauer pro Woche und mit y die Anzahl seiner Trainingseinheiten, die er für Beweglichkeit pro Woche aufwendet, so lautet seine Nutzenfunktion

$$u(x, y) = \ln(x + 1) + 3\ln(y + 3)$$

Insgesamt stehen dem Sportler pro Woche 21 ZE (Zeiteinheiten) zur Verfügung. Eine Trainingseinheit Ausdauer dauert 2 ZE, eine Trainingseinheit Beweglichkeit 3 ZE. Erstellen Sie eine optimalen Trainingsplan für den Sportler für die kommenden Woche, wenn der Sportler nach Maximierung seines Nutzen strebt. Gehen Sie dabei in den Folgenden angegebenen Schritten vor.

a) Formulieren Sie die Zeitrestriktion als Nebenbedingung.
Lösung.

$$2x + 3y = 21$$

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima unter der Nebenbedingung.
Lösung.
$x = 3, y = 5$

c) Weisen Sie nach, dass das unter b) gefundene lokale Maximum bereits das globale ist.
Lösung.
Durch Untersuchung der Randstellen von $x \in \left[0; \frac{21}{2}\right]$ und $x \in [0; 7]$ ergibt sich, dass bei $x = 3, y = 5$ ein globales Maximum vorliegt

d) Wie groß ist der maximale Nutzen des Sportlers bei optimalen Trainingsplan? Fassen Sie die Ergebnisse als konkrete Trainingsanweisung an den Sportler in einem aussagekräftigen Schlusssatz zusammen.
Lösung.
Der Sportler soll zur Maximierung seines Nutzens 3 Trainingseinheiten Ausdauer trainieren sowie 5 Trainingseinheiten Beweglichkeit. Sein maximaler Nutzen beträgt dann rund $7,62$ Nutzeneinheiten.

Aufgabe 9. Falls von drei Produkten x, y bzw. z Einheiten produziert werden, lauten die Kosten:

$$K(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2xz + 3yz$$

Gesucht sind die niedrigsten Produktionskosten unter den beiden Nebenbedingungen:

- insgesamt müssen 1000 Einheiten produziert werden
- vom dritten Produkt z muss halb soviel hergestellt werden wie von den beiden anderen Produkten zusammen

Lösung.
Die niedrigsten Produktionskosten liegen bei $972222,22$ für $z = \frac{2000}{3}, y = -\frac{500}{3}, x = 500$

Aufgabe 10. Vor einer Werkhalle soll ein rechteckiger Lagerplatz mit einer Fläche von 450 m^2 angelegt werden. Dazu ist der Platz an drei Seiten mit einem Zaun zu umgeben, an der vierten Seite wird er durch einen Teil der Werkhalle vollständig begrenzt.
Wie müssen die Abmessungen des Platzes gewählt werden, damit die Gesamtlänge des Zaunes minimal wird?
Berechnen Sie für diesen Fall die Gesamtlänge des Zaunes.

Lösung.
Für $a = 15$ Meter und $b = 30$ Meter ergibt sich eine minimale Gesamtlänge der Zaunes von 60 Meter.

Aufgabe 11. Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$ unter den Nebenbedingungen $z + x + y = 10$ und $2y = x$.

Lösung.

$x = 4$, $y = 2$, $z = 4$