M. Sc.Petra Clauß
Mathematische Grundlagen und Analysis

Wintersemester 2015/16
01. Dezember 2015

LÖSUNGEN
Extremwertaufgaben

Aufgabe 1. :
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$f(x) = -\frac{2}{5}x^3 + 18x^2 + 24x, \qquad \mathbb{D} = (0, 40)$$

Ermitteln Sie das Ertragsmaximum.

Lösung.
Das globale Ertragsmaximum beträgt somit $6127,885$.

Aufgabe 2. :
Für die Massenproduktion einer Maschine wird eine große Anzahl eines bestimmten Bauteils benötigt, dessen Querschnitt

a) ein Rechteck mit den Seitenlängen $2x > 0$ und $y > 0$ mit darübergesetztem Halbkreis ist und

b) einen vorgegebenen Umfang U aufweist

Bestimmen Sie den Querschnitt des Bauteils, für den der Flächeninhalt F des Bauteils maximal ist, und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Lösung.
Der maximale Flächeninhalt liegt bei $\dfrac{U^2}{2(\pi + 4)}$ für einem gegebenen Umfang U.

Aufgabe 3. :
Onkel Otto hat, um die mathematischen Ambitionen seines Neffen Florian zu fördern, in seinem Testament verfügt: „... und mein Neffen Florian darf sich unten am Bach ein rechteckiges Grundstück abstecken, so groß wie er mit 500 m Zaun eingrenzen kann.“
Florian möchte und sollte dieses Geschenk bestmöglich nutzen - genau das entspricht auch der Absicht des Onkels. "Bestmöglich“ bedeutet hier, dass es ein möglichst großes Grundstück wählt. Dabei muss er eine Bedingung respektieren: Die Zaunlänge muss 500 m betragen - keinenfalls mehr! Und eingezäunt wird natürlich nur auf drei Seiten, denn wer wird ein Ufer mit einem Zaun verbauen!

Lösung.
Florians Grundstück hat eine Fläche von $31.250\,m^2$

Aufgabe 4. :

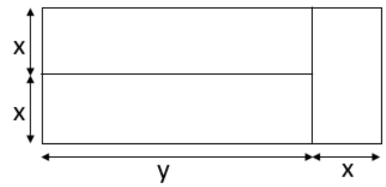
a) Es soll eine rechteckige Koppel von 4800 m^2 eingezäunt und dann in 2 Weiden unterteilt werden. Die Kosten für den Zaun betragen 20 GE pro Meter. Welche Abmessungen muss die Koppel haben, damit die Zaunkosten möglichst gering ausfallen?
Lösung.
Die längere Seite der Koppel muss die Länge von $x = 60\sqrt{2}$ Meter und die kürzere Seite $y = 40\sqrt{2}$ Meter haben.

b) Nehmen wir nun an, dass die Kosten für die Umzäunung 25 GE pro Meter, die für die Unterteilung 15 GE pro Meter betragen. Welche Abmessungen wird man jetzt wählen?
Lösung.
Die längere Seite der Koppel muss die Länge von $x = \sqrt{6240}$ Meter und die kürzere Seite $y = \dfrac{40\sqrt{390}}{13}$ Meter haben.

Aufgabe 5. :
Ein Supermarkt will einen rechteckigen, 4000 m^2 großen Parkplatz anlegen. Drei Seiten der Umzäunung werden, mit Ausnahme der 8 m breiten Einfahrt, durch einen Holzzaun gebildet; der laufende Meter kostet 20 GE. Die vierte Seite muss gemauert werden; dafür betragen die Kosten pro laufenden Meter 80 GE. Bei welchen Abmessungen werden die Kosten für die Umzäunung minimal?

Lösung.
Bei der Abmessung von 40 auf 100 Meter werden die Kosten minimal.

Aufgabe 6. :
Es soll ein Freigehege mit drei rechteckigen Teilflächen wie in der Skizze angelegt werden. Für die Einzäunung und das Abteilen stehen insgesamt 30 m Maschendraht zur Verfügung.
Ermitteln Sie, für welche Abmessung der Flächeninhalt F des Freigeheges möglichst groß wird.

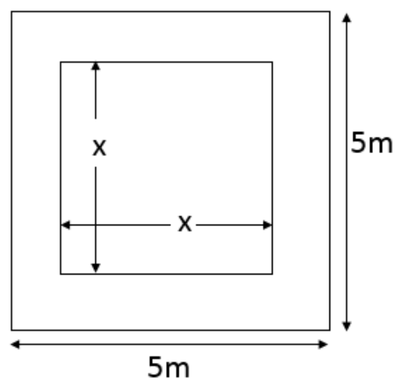


Lösung.
Der Flächeninhalt ist für $x = 3$ und $y = 2$ maximal.

Aufgabe 7. :
Ein Kindergarten plant den Bau eines Sandkastens. Der Rand wird mit Platten belegt. Für jeden Quadratmeter Sandfläche entstehen Kosten von 40 GE. Die Platten kosten 35 GE je Quadratmeter. Um eine möglichst große Sandfläche zu bekommen beteiligen sich die Eltern der Kinder an den Kosten, indem sie für jeden Meter Umfang der Sandfläche 10 GE beisteuern.
Zeigen Sie, dass die anteiligen Kosten für den Kindergarten

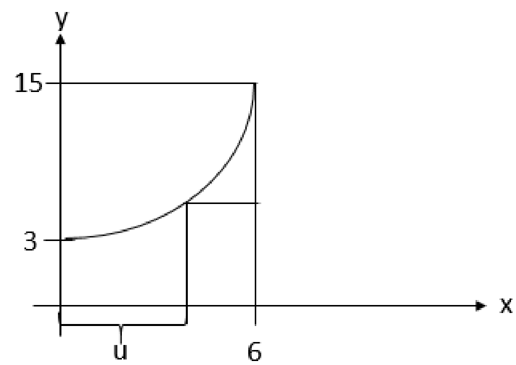
$$K(x) = 5x^2 - 40x + 875$$

betragen.
Ermitteln Sie, bei welchem Wert von x die vom Kindergarten aufzubringenden Kosten $K(x)$ am geringsten sind. Welche Betrag muss der Kindergarten in diesem Fall bezahlen? Welchen Betrag steuern dann die Eltern bei?



Lösung.
Die Kosten für den Kindergarten betragen 795 GE. Die für die Eltern betragen 160 GE.

Aufgabe 8. :
Eine rechteckige Glasscheibe ist 6 m breit und 15 m lang. Aufgrund einer Erschütterung zerbrach das Glas. Die Kante der Bruchstelle entspricht dem Graphen einer quadratischen Funktion, der an der Stelle $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente hat. Weitere Eigenschaften dieses Graphen können Sie der Zeichnung entnehmen



1. Bestimmen Sie den Funktionsterm der quadratischen Funktion f, deren Graph dem Kantenverlauf der Bruchstelle des Glases entspricht
   Lösung.
   $$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3$$

2. Aus dem verbleibenden Glasstück soll ein Rechteck herausgeschnitten werden. (siehe Zeichnung)

   (a) Bestimmen Sie die von $u\,(0 \leq u \leq 6)$ abhängige Flächenmaßzahl des Rechtecks
   Lösung.
   $$A(u) = -\frac{1}{3}u^3 + 2u^2 - 3u + 18$$

   (b) Ermitteln Sie den Wert u so, dass das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt annimmt. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks an. Betrachten Sie auch die Ränder.
   Lösung.
   Der maximale Flächeninhalt beträgt 18 m^2