M. Sc. Petra Clauß
Mathematische Grundlagen und Analysis

Wintersemester 2015/16
02. Dezember 2015

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung folgender Funktionen:

$$f_1(x,y) = 4x^3 - \frac{2}{3}y^2, \quad f_2(x,y) = 2x^3e^{2y}, \quad f_3(x,y) = \sqrt{2x+3xy+4y},$$

$$f_4(x,y) = \ln(x+y), \quad f_5(x,y) = \ln(xy)+\sqrt{x^2-y}, \quad f_6(x,y) = \ln(y^2-x)+\cos(x),$$

$$f_7(x,y,z) = \ln(xy)+2\ln\left(\frac{z}{\sqrt{zy}}\right)-\ln(zx), \quad f_8(x,y) = e^{x+y}, \quad f_9(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

$$f_{10}(x,y) = \frac{x}{2}e^{2y} + \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \quad f_{11}(x,y,z) = \frac{6xz+3y^2}{e^y} + \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x^3+1}}{z^2+2},$$

$$f_{12}(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}, \quad f_{13}(x,y) = \frac{1}{xy^2} + x^2y, \quad f_{14}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f_{15}(a,b,c,d,e,f) = a^2 + 2b\cdot c + d^2 + d\cdot e\cdot f + \sqrt{a\cdot c}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die jeweils angegebenen partiellen Ableitungen:

a) $U = A\cdot\sin(\omega t+\alpha), \qquad (U_A, U_\omega, U_t, U_\alpha)$

b) $F = \frac{mv^2}{r}, \qquad (F_m, F_v, F_r)$

c) $Z = \sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}, \qquad (Z_R, Z_{X_c})$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x,y) = 3x^2y - 4x\cos y$

b) $f_2(x,y) = ye^{2x} - 3xy^2 + 4x - 1$

c) $f_3(x,y) = x^2\ln y + y^2\ln x + xy + 7$

d) $f_4(x,y) = (1+x^2-2y^2)^2$

e) $f_5(x,y) = x(3-x^2) - y^2 + 4y + 9$

f) $f_6(x,y,z) = 3x^2\ln(y) + 4x^3z^2 - y^2z^3$

g) $f_7(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$

h) $f_8(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ (nur 1. Ordnung!)

Aufgabe 4. Für die Funktion

$$f(x, y, z) = e^{xyz}$$

ist die partielle Ableitung 3. Ordnung f_{xyz} zu bilden.

Aufgabe 5. Ermitteln Sie die lokalen Extremwerte der folgenden Funktionen:

a) $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$

b) $f(x, y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$

Aufgabe 6. Betrachtet wird die (makroökonomische) Produktionsfunktion $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$,

$$Y = f(A, K) = -3A^3 + 2A^2 + 50A - 3A^2K + 2AK^2 - 3K^3 + 5K2$$

welche die Abhängigkeit zwischen dem Sozialprodukt Y und den Produktionsfaktoren Arbeit A und Kapital K angibt.

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Produktionsfunktion f für die beiden Faktorkombinationen $A = 2$ und $K = 5$ bzw. $A = 10$ und $K = 2$