M. Sc.Petra Clauß
Mathematische Grundlagen und Analysis

Wintersemester 2015/16
09. Dezember 2015

LÖSUNGEN
Differentialrechnung für Funktionen mit mehereren Veränderlichen

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung folgender Funktionen:

$$f_1(x,y)=4x^3-\frac{2}{3}y^2,\quad f_2(x,y)=2x^3e^{2y},\quad f_3(x,y)=\sqrt{2x+3xy+4y},$$

$$f_4(x,y)=\ln(x+y),\quad f_5(x,y)=\ln(xy)+\sqrt{x^2-y},\quad f_6(x,y)=\ln(y^2-x)+\cos(x),$$

$$f_7(x,y,z)=\ln(xy)+2\ln\left(\frac{z}{\sqrt{zy}}\right)-\ln(zx),\quad f_8(x,y)=e^{x+y},\quad f_9(x,y)=e^{x^2+y^2}$$

$$f_{10}(x,y)=\frac{x}{2}e^{2y}+\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),\quad f_{11}(x,y,z)=\frac{6xz+3y^2}{e^y}+\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x^3+1}}{z^2+2},$$

$$f_{12}(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y^2},\quad f_{13}(x,y)=\frac{1}{xy^2}+x^2y,\quad f_{14}(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f_{15}(a,b,c,d,e,f)=a^2+2b\cdot c+d^2+d\cdot e\cdot f+\sqrt{a\cdot c}$$

Lösung.

$$\frac{\partial}{\partial x}f_1(x,y)=12x^2 \qquad \frac{\partial}{\partial y}f_1(x,y)=-\frac{4}{3}y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_2(x,y)=6x^2e^{2y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}f_2(x,y)=4x^3e^{2y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_3(x,y)=\frac{1+\frac{3}{2}y}{\sqrt{2x+3xy+4y}} \qquad \frac{\partial}{\partial y}f_3(x,y)=\frac{\frac{3}{2}x+2}{\sqrt{2x+3xy+4y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_4(x,y)=\frac{1}{x+y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}f_4(x,y)=\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_5(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2-y}} \qquad \frac{\partial}{\partial y}f_5(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{2\sqrt{x^2-y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_6(x,y)=-\frac{1}{y^2-x}-\sin(x) \qquad \frac{\partial}{\partial y}f_6(x,y)=\frac{2y}{y^2-x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_7(x,y,z)=0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}f_7(x,y,z)=0 \qquad \frac{\partial}{\partial z}f_7(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_8(x,y) = e^{x+y} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_8(x,y) = e^{x+y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_9(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_9(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{10}(x,y) = \frac{1}{2}e^{2y} + \frac{1}{x^2(1+y^2)} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_{10}(x,y) = xe^{2y} + \frac{1}{1+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{11}(x,y,z) = \frac{6z}{e^y} + \frac{9x^2}{4(z^2+2)\sqrt{x^3+1}} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_{11}(x,y,z) = \frac{6y-6xz-3y^2}{e^y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f_{11}(x,y,z) = \frac{6x}{e^y} - \frac{3z\sqrt{x^3+1}}{(z^2+2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{12}(x,y) = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_{12}(x,y) = -\frac{2}{y^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{13}(x,y) = -\frac{1}{x^2y^2} + 2xy \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_{13}(x,y) = -\frac{2}{xy^3} + x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{14}(x,y) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_{14}(x,y) = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} f_{15}(a,b,c,d,e,f) = 2a + \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{a}} \qquad \frac{\partial}{\partial b} f_{15}(a,b,c,d,e,f) = 2c$$

$$\frac{\partial}{\partial c} f_{15}(a,b,c,d,e,f) = 2b + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{c}} \qquad \frac{\partial}{\partial d} f_{15}(a,b,c,d,e,f) = 2d + ef$$

$$\frac{\partial}{\partial e} f_{15}(a,b,c,d,e,f) = df \qquad \frac{\partial}{\partial f} f_{15}(a,b,c,d,e,f) = de$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die jeweils angegebenen partiellen Ableitungen:

a) $U = A \cdot \sin(\omega t + \alpha), \qquad (U_A, U_\omega, U_t, U_\alpha)$

Lösung.

$$U_A = \sin(\omega t + \alpha)$$
$$U_\omega = A\cos(\omega t + \alpha) \cdot t$$
$$U_t = A\cos(\omega t + \alpha) \cdot \omega$$
$$U_\alpha = A\cos(\omega t + \alpha)$$

b) $F = \frac{mv^2}{r}, \qquad (F_m, F_v, F_r)$
Lösung.

$$F_m = \frac{v^2}{r}$$
$$F_v = \frac{2vm}{r}$$
$$F_r = -\frac{mv^2}{r^2}$$

c) $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \qquad (Z_R, Z_{X_c})$
Lösung.

$$Z_R = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$
$$Z_{X_c} = -\frac{X_L - X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Lösung.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x, y) = 3x^2y - 4x\cos y$

b) $f_2(x, y) = ye^{2x} - 3xy^2 + 4x - 1$

c) $f_3(x, y) = x^2 \ln y + y^2 \ln x + xy + 7$

d) $f_4(x, y) = (1 + x^2 - 2y^2)^2$

e) $f_5(x, y) = x(3 - x^2) - y^2 + 4y + 9$

f) $f_6(x, y, z) = 3x^2 \ln(y) + 4x^3z^2 - y^2z^3$

g) $f_7(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

h) $f_8(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ (nur 1. Ordnung!)

Lösung.

a) $f_1(x, y) = 3x^2y - 4x\cos y$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_1 = 6xy - 4\cos(y) \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_1 = 3x^2 + 4x\sin(y)$$

$$H_{f_1} = \begin{pmatrix} 6y & 6x + 4\sin(y) \\ 6x + 4\sin(y) & 4x\cos(y) \end{pmatrix}$$

b) $f_2(x,y) = ye^{2x} - 3xy^2 + 4x - 1$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_2 = 2ye^{2x} - 3y^2 + 4 \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_2 = e^{2x} - 6xy$$

$$H_{f_2} = \begin{pmatrix} 4ye^{2x} & 2e^{2x} - 6y \\ 2e^{2x} - 6y & -6x \end{pmatrix}$$

c) $f_3(x,y) = x^2 \ln y + y^2 \ln x + xy + 7$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_3 = 2x \ln y + y^2 \frac{1}{x} + y \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_3 = x^2 \frac{1}{y} + 2y \ln x + x$$

$$H_{f_3} = \begin{pmatrix} 2 \ln y - \dfrac{y^2}{x^2} & 2\dfrac{x}{y} + 2\dfrac{y}{x} + 1 \\ 2\dfrac{x}{y} + 2\dfrac{y}{x} + 1 & -\dfrac{x^2}{y^2} + 2 \ln x \end{pmatrix}$$

d) $f_4(x,y) = (1 + x^2 - 2y^2)^2$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_4 = 4(1 + x^2 - 2y^2)x \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_4 = -8y(1 + x^2 - 2y^2)$$

$$H_{f_4} = \begin{pmatrix} 4(1 + x^2 - 2y^2) + 8x^2 & -16xy \\ -16xy & -8(1 + x^2 - 2y^2) + 32y^2 \end{pmatrix}$$

e) $f_5(x,y) = x(3 - x^2) - y^2 + 4y + 9$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_5 = 3 - 3x^2 \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_5 = -2y + 4$$

$$H_{f_5} = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

f) $f_6(x,y,z) = 3x^2 \ln(y) + 4x^3 z^2 - y^2 z^3$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_6 = 6x \ln y + 12x^2 z^2 \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_6 = \frac{3x^2}{y} - 2yz^3 \qquad \frac{\partial}{\partial z} f_6 = 8x^3 z - 3z^2 y^2$$

$$H_{f_6} = \begin{pmatrix} 6 \ln y + 24xz^2 & \frac{6x}{y} & 24x^2 z \\ \frac{6x}{y} & -\dfrac{3x^2}{y^2} - 2z^3 & -6yz^2 \\ 24x^2 z & -6yz^2 & 8x^3 - 6zy^2 \end{pmatrix}$$

g) $f_7(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_7 = \frac{1}{n},\ i = 1, \ldots, n$$

Alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung sind null!

h) $f_8(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_8 = \frac{1}{n}(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n,\ i = 1, \ldots, n$$

Aufgabe 4. Für die Funktion

$$f(x, y, z) = e^{xyz}$$

ist die partielle Ableitung 3. Ordnung f_{xyz} zu bilden.

Lösung.

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} f = yze^{xyz}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = (xz^2y + z)e^{xyz}$$

$$f_{xyz} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} f = (3xyz + x^2z^2y^2 + 1)e^{xyz}$$

Aufgabe 5. Ermitteln Sie die lokalen Extremwerte der folgenden Funktionen:

a) $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$
Lösung.
Sattelpunkt bei $(0, 0)$, Maximum bei $(1, 1)$

b) $f(x, y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$
Lösung.
Minimum bei $(0, 2)$, Maximum bei $(0, 0)$, Sattelpunkte bei $(-2, 1)$ und $(2, 1)$

Aufgabe 6. Betrachtet wird die (makroökonomische) Produktionsfunktion $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$,

$$Y = f(A, K) = -3A^3 + 2A^2 + 50A - 3A^2K + 2AK^2 - 3K^3 + 5K^2$$

welche die Abhängigkeit zwischen dem Sozialprodukt Y und den Produktionsfaktoren Arbeit A und Kapital K angibt.

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Produktionsfunktion f für die beiden Faktorkombinationen $A = 2$ und $K = 5$ bzw. $A = 10$ und $K = 2$

Lösung.

$$\nabla f(A, K) = \begin{pmatrix} -9A^2 + 4A + 50 - 6AK + 2K^2 \\ -3A^2 + 4AK - 9K^2 + 10K \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2, 5) = \begin{pmatrix} 12 \\ -147 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(10, 2) = \begin{pmatrix} -922 \\ -236 \end{pmatrix}$$

$$H_f(A, K) = \begin{pmatrix} -18A + 4 - 6K & -6A + 4K \\ -6A + 4K & 4A - 18K + 10 \end{pmatrix}$$

$$H_f(2, 5) = \begin{pmatrix} -62 & 8 \\ 8 & -72 \end{pmatrix} \qquad H_f(10, 2) = \begin{pmatrix} -188 & -52 \\ -52 & 14 \end{pmatrix}$$