HOCHSCHULE SCHMALKALDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

M. Sc.Petra Clauß
Mathematische Grundlagen und Analysis

Wintersemester 2015/16
11. November 2015

LÖSUNGEN
Ableitungen

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = x^2$ über den Differentialquotient

Lösung:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x+x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)} = x + x_0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0$$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist eine überall differenzierbare Funktion und es gilt $f'(x) = 2x$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = (x+1)(x+4), \quad f_2(x) = (3x+5)(x-2), \quad f_3(x) = (3x^2+x)(13x-9x^2),$$
$$f_4(x) = (x-4)(x^2+3), \quad f_5(x) = (5x^3-4x)(x^2+5x), \quad f_6(x) = (x^2+3x)\cdot e^x,$$
$$f_7(x) = 4\sin x \tan x, \quad f_8(x) = (\ln(x))^2 \cdot e^x, \quad f_9(x) = 4^x \cdot x^4$$

Lösung.

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= 2x+5 \\
f_2'(x) &= 6x-1 \\
f_3'(x) &= -108x^3+90x^2+26x \\
f_4'(x) &= 3x^2-8x+3 \\
f_5'(x) &= 25x^4+100x^3-12x^2-40x \\
f_6'(x) &= (x^2+5x+3)e^x \\
f_7'(x) &= \frac{4\sin x(\cos^2 x+1)}{\cos^2 x} \\
f_8'(x) &= e^x \ln(x)\left(\frac{2}{x}+\ln(x)\right) \\
f_9'(x) &= 4^x \cdot x^3(\ln(4)x+4)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{x^2}{1-x^2}, \quad f_2(x) = \frac{3x^2+4x}{\sqrt{x}}, \quad f_3(x) = \frac{5x^3+6x^2}{x^7},$$

$$f_4(x) = \frac{2x^2+3}{x^2}, \quad f_5(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad f_6(x) = \frac{\cos x}{x^2},$$

$$f_7(x) = \frac{x \cdot e^x}{5x-1}, \quad f_8(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}, \quad f_9(x) = \frac{x^2}{-x^3+6x-4}$$

Lösung.

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \\
f_2'(x) &= \frac{9}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \\
f_3'(x) &= \frac{20}{x^5} - \frac{30}{x^6} \\
f_4'(x) &= -\frac{6}{x^3} \\
f_5'(x) &= \frac{2-\ln(x)}{2x\sqrt{x}} \\
f_6'(x) &= \frac{-x\sin x - 2\cos x}{x^3} \\
f_7'(x) &= \frac{(5x^2-x-1)e^x}{(5x-1)^2} \\
f_8'(x) &= \frac{1}{1+2\cos x \sin x} \\
f_9'(x) &= \frac{x^4+6x^2-8x}{(-x^3+6x-4)^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = (x^2+1)^3, \quad f_2(x) = \sqrt{2x^2-x-3}, \quad f_3(x) = e^{3x-1},$$

$$f_4(x) = e^{x^2}, \quad f_5(x) = \sin(x^2-3x), \quad f_6(x) = 2e^{5x},$$

$$f_7(x) = e^{\sin 3x}, \quad f_8(x) = \ln\sqrt{4x-x^2}, \quad f_9(x) = \ln\left(\frac{1-e^x}{e^x}\right)$$

HOCHSCHULE SCHMALKALDEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Lösung.

$$
\begin{aligned}
f_1'(x) &= 3(x^2+1)\cdot 2x = 6x^5+12x^3+6x\\
f_2'(x) &= \frac{(4x-1)}{2\sqrt{2x^2-x-3}}\\
f_3'(x) &= 3e^{3x-1}\\
f_4'(x) &= 2xe^{x^2}\\
f_5'(x) &= \cos(x^2-3x)(2x-3)\\
f_6'(x) &= 10e^{5x}\\
f_7'(x) &= e^{\sin 3x}(3\cos(3x))\\
f_8'(x) &= \frac{2-x}{4x-x^2}\\
f_9'(x) &= -\frac{1}{1-e^x}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1},\quad f_2(x) = \frac{x^2\sin x}{x-\sqrt{x}},\quad f_3(x) = \ln(x^2+1),$$

$$f_4(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}},\quad f_5(x) = 2x\cdot\ln(x) + \ln(x^3),\quad f_6(x) = \frac{\sin x}{x},$$

$$f_7(x) = \sqrt[3]{(2x-5)^4},\quad f_8(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad f_9(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}$$

Lösung.

$$
\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \\
f_2'(x) &= \frac{x\sin x\left(x-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)+x^2(x-\sqrt{x})\cos x}{(x-\sqrt{x})^2} \\
f_3'(x) &= \frac{2x}{x^2+1} \\
f_4'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-\frac{5}{3\sqrt[3]{x^8}} \\
f_5'(x) &= 2\ln(x)+2+\frac{3}{x} \\
f_6'(x) &= \frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2} \\
f_7'(x) &= \frac{8}{3}\sqrt[3]{(2x-5)} \\
f_8'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\
f_9'(x) &= \frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{2x^2-3(x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^4}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden, parameterabhängigen Funktionen f.

a) $f(t)=\alpha t^2+t$, $t\in\mathbb{R}$, mit $\alpha\in\mathbb{R}$

b) $f(x)=(1+\beta x^2)^3$, $x\in\mathbb{R}$, mit $\beta\in\mathbb{R}$

c) $f(y)=\ln(\delta y)$, $y>0$, mit $\delta>0$

d) $f(z)=\ln(1+\delta z)$, $z>0$, mit $\delta>0$

e) $f(y)=1-(1-y)^{1/\beta}$, $y\in(0,1)$, mit $\beta>0$

f) $f(t)=t^{1-\delta}$, $t>0$, mit $\delta>0$

g) $f(x)=e^{-(x-\mu)^\alpha}$, $x\in\mathbb{R}$, mit $\alpha\in\mathbb{N}_0$ und $\mu\in\mathbb{R}$

h) $f(z)=\ln(\delta z)e^{-(z-\mu)}$, $z>0$, mit $\delta>0$ und $\mu\in\mathbb{R}$

Lösung.

a) $f'(t) = 2\alpha t + 1 \qquad f''(t) = 2\alpha$

b) $f'(x) = 6\beta x(1+\beta x^2)^2 \qquad f''(x) = 6\beta(1+\beta x^2)(1+5\beta x^2)$

c) $f'(y) = \dfrac{1}{y} \qquad f''(y) = -\dfrac{1}{y^2}$

d) $f'(z) = \dfrac{\delta}{1+\delta z} \qquad f''(z) = -\dfrac{\delta^2}{(1+\delta z)^2}$

e) $f'(y) = \dfrac{1}{\beta}(1-y)^{\frac{1}{\beta}-1} \qquad f''(y) = \dfrac{\beta-1}{\beta^2}(1-y)^{\frac{1}{\beta}-2}$

f) $f'(t) = (1-\delta)t^{-\delta} \qquad f''(t) = \delta(\delta-1)t^{-\delta-1}$

g) $f'(x) = -\alpha(x-\mu)^{\alpha-1}e^{-(x-\mu)^\alpha} \qquad f''(x) = \alpha\left[1-\alpha+\alpha(x-\mu)^\alpha\right](x-\mu)^{\alpha-2}e^{-(x-\mu)^\alpha}$

h) $f'(z) = \left(\dfrac{1}{z} - \ln(\delta) - \ln(z)\right)e^{\mu-z} \qquad f''(z) = \left(-\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{2}{z} + \ln(\delta z)\right)e^{\mu-z}$