Partielle Ableitung erster Ordnung

Definition 4.2. [Pap09b]
Unter einer partiellen Ableitung 1. Ordnung einer Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach x_i an der Stelle $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ wird der folgende Grenzwert verstanden:
Partielle Ableitung 1. Ordnung nach x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = f_{x_i}(x^0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0 + k, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}{k}$$

Definition 4.3. Existieren alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung, so heißt der Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right)$$

der Gradient an der Stelle x^0. Er wird mit $gradf(x^0)$ oder $\nabla f(x^0)$ bezeichnet.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Definition 4.4. [Pap09b]
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion, dann heißt die Matrix

$$H_f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x^0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x^0) & f_{x_1x_2}(x^0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x^0) \\ f_{x_2x_1}(x^0) & f_{x_2x_2}(x^0) & \cdots & f_{x_2x_n}(x^0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x^0) & f_{x_nx_2}(x^0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x^0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

der zweiten partiellen Ableitungen in $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$ Hessematrix von f am Punkt x^0

[Pap09b] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 2. Vieweg+Teubner, 12. Auflage, 2009.