

2 Grenzwerte und Stetigkeit

2.1 Grenzwerte

Definition 2.1. [CN09]

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergent gegen

- eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{D}$, $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ gilt:

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

a heißt Grenzwert von f an der Stelle x_0 . Als Notation werden sowohl $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ als auch $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$ verwendet

- $+\infty$ (bzw. $-\infty$), falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{D}$, $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ gilt:

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \text{ (bzw. } -\infty)$$

Als Notation werden $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ und $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ verwendet. Entsprechendes gilt für $-\infty$

Definition 2.2. [CN09]

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ von $\begin{cases} \text{links} \\ \text{rechts} \end{cases}$ konvergent gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ (gegen $\pm\infty$), falls

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \text{ (bzw. } \pm\infty) \text{ für alle Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n \in \mathbb{D}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$$

$$\text{und } \begin{cases} x_n < x_0 \\ x_n > x_0 \end{cases} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

a bzw. $\pm\infty$ heißt $\begin{cases} \text{linksseitiger} \\ \text{rechtsseitiger} \end{cases}$ Grenzwert von f an der Stelle x_0 .

Als Notation werden $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ und $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} a$ für rechtsseitige bzw. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ und $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} a$ für linksseitige Grenzwerte verwendet.

Definition 2.3. Konvergenz bei Annäherung an Unendlich [CN09]

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt für $x \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ konvergent gegen

- eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{D}$ und $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ gilt:

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

a heißt Grenzwert von f für $x \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

- $+\infty$ (bzw. $-\infty$) falls

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty(-\infty)$$

für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{D}$ und $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

$+\infty(-\infty)$ heißt Grenzwert von f für $x \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

[CN09] Cramer, E. und J. Nešlehová: *Vorkurs Mathematik Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen*. Springer Verlag, 4. Auflage, 2009.