1. Schwerpunkt: Matrizenrechnung

1.1 Untersuchen Sie, für welche Werte p die Matrix C=A*B eine Inverse Matrix besitzt!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2 Man gebe das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= a \quad \text{(I)} \\ x - y &= b \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

in Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix A an!
Man löse es mit dem Gauß-Algorithmus nach x und y auf und gebe das Ergebnis ebenfalls in Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix B an!
Zeigen Sie, dass A und B zueinander inverse Matrizen sind!
Für welche Wahl der Konstanten a, b ist das gegebene Gleichungssystem eindeutig lösbar, unlösbar bzw. besitzt unendlich viel Lösungen?

1.3 Gegeben sind die Matrizen A, B, C mit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ p & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ p & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Matrizen A, B, B^T und C !
b) Berechnen Sie die Produkte AB und B^TA^T !
c) Welche Matrix X erfüllt die Gleichung $2A + X = 4C$?

1.4. Stellen Sie die nachfolgende Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

nach dem Lösungsvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ um und bestimmen Sie die Werte von a und b mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix.

1.5 Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= -7 \\ 4x - y &= 25 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem in Matrizenform.
b) Stellen Sie die Matrixgleichung nach dem Spaltenvektor der gesuchten Variablen um, und bestimmen Sie die Werte von x und y mit Hilfe der inversen Matrix.

(Die inverse Matrix kann mit dem Gauss-Jordan-Verfahren oder auch über Adjunkten erfolgen – in jedem Fall ist ihre Berechnung ausführlich durchzuführen !)

1.6 Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit der inversen Matrix

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - 3y + 4z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

Die inverse Matrix ist ausführlich mit dem Gauss-Jordan-Verfahren zu berechnen !

2. Lineare Gleichungssysteme (ohne Matrizen)

2.1 Lösen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 4 & \quad (\mathrm{I}) \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 9 & \quad (\mathrm{II}) \\ x & - & y & + & 2z & = & -3 & \quad (\mathrm{III}) \end{array}$$

2.2 Man löse:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrl} 4x & - & 5y & - & 7z & = & 0 & \quad (\mathrm{I}) \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 & \quad (\mathrm{II}) \\ 7x & + & y & - & z & = & 0 & \quad (\mathrm{III}) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrl} 7x & - & y & + & 5z & = & 1 & \quad (\mathrm{I}) \\ x & + & 3y & - & z & = & 7 & \quad (\mathrm{II}) \\ 15x & + & y & + & 9z & = & 2 & \quad (\mathrm{III}) \end{array}$$

2.3 Lösen sie mit dem Gauß'schen Verfahren:

$$\begin{array}{rrrrcrl} 2x & & & -u & = & 0 & \quad (\mathrm{I}) \\ x & +y & +2z & +u & = & 6 & \quad (\mathrm{II}) \\ 2x & +2y & +4z & & = & 8 & \quad (\mathrm{III}) \\ x & -y & -2z & -2u & = & -6 & \quad (\mathrm{IV}) \end{array}$$

2.4 Untersuchen Sie folgende Aussagen über Gleichungssysteme (GS). Kreuzen Sie die jeweils richtigen Aussagen an. (Es können auch mehrere gleichzeitig richtig sein)

a) Gegeben ist ein lineares GS mit 3 Gleichungen für 5 Variable.
- o Dieses GS ist auf jeden Fall unlösbar.
- o Dieses GS hat genau eine Lösung.
- o Dieses GS ist entweder unlösbar oder hat unendlich viele Lösungen.

b) Gegeben ist ein lineares homogenes GS. Von diesem lässt sich die Koeffizientendeterminante D berechnen. Sie hat den Wert D=0.
- o Das GS hat genauso viele Gleichungen wie Variable.
- o Das GS kann unlösbar sein.
- o Das GS kann nur die triviale Lösung besitzen.

- Das GS besitzt auf jeden Fall unendlich viele Lösungen.

c) Gegeben ist ein lineares GS. Von diesem lässt sich die Koeffizientendeterminante D berechnen. Sie hat den Wert D=-5.

- Das GS kann nicht mit dem Gauß'schen Verfahren gelöst werden.
- Das GS ist unlösbar.
- Das GS lässt sich mit der Cramerschen Regel lösen.
- Das GS lässt sich mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix lösen.