1. Kommutativität

Wenn das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) gültig ist, dürfen bei einer Operation Operanden vertauscht werden, ohne dass das Ergebnis sich ändert. Im Bereich der reellen Zahlen sind die Addition und Multiplikation kommutativ, Subtraktion und Division nicht.

$a + b = b + a$
$a * b = b * a$

Bsp.:

$5 + 3 = 8$	$3 + 5 = 8$
$5 - 3 = 2$	$3 - 5 = -2$
$2 * 3 = 6$	$3 * 2 = 6$
$\frac{8}{4} = 2$	$\frac{4}{8} = 0{,}5$

2. Assoziativität

Wenn das Assoziativgesetz (Verknüpfungsgesetz) gültig ist, spielt die Reihenfolge der Ausführung der Operationen keine Rolle. Innerhalb assoziativer Ausdrücke kann beliebig geklammert werden. Im Bereich der reellen Zahlen sind Multiplikation und Addition assoziativ; Subtraktion und Division nicht.

a ᴼ (b ᴼ c) = (a ᴼ b) ᴼ c (ᴼ = zweistellige Verknüpfung)

Bsp.:

$(5 + 3) + 2 = 9$	$5 + (3 + 2) = 9$
$(5 - 3) - 2 = 0$	$5 - (3 - 2) = 4$
$(4 * 2) * 3 = 24$	$4 * (2 * 3) = 24$
$(4 / 2) / 2 = 1$	$4 / (2 / 2) = 4$

3. Distributivität

Die Distributivgesetze geben an, wie sich zwei zweistellige Verknüpfungen bei der Auflösung von Klammern zueinander verhalten.

<u>Ausmultiplizieren/Ausklammern</u>
a * (b ± c) = a * b ± a * c

Bsp.:

$5 * (3 + 4) = 35$	$5 * 3 + 4 * 5 = 35$
$2 * 4 + 2 * 3 = 14$	$2 * (4 + 3) = 14$

$x * (x + y) = x * x + x * y = x^2 + x * y$
$x^2 + x = x * x + x * 1 = x * (x + 1)$

4. Binome

4.1. Binomische Formeln

1. binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel: $(a+b) * (a-b) = a^2 - b^2$

Bsp.:

$$(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$
$$(3x-2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y2$$

4.2. Binome mit höheren Potenzen

Das Pascalsche Dreieck liefert ein simples Schema zur Verdeutlichung von Binomen mit der jeweiligen Potenz.

1	$(a \pm b)^0 = 1$
1 1	$(a \pm b)^1 = a \pm b$
1 2 1	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
1 3 3 1	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^b \pm b^3$
1 4 6 4 1	$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$$
$$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$$
$$\dots$$

Bsp.:

$$(x^2 - 3y)^4 = (x^2)^4 - 4 * (x^2)^3 * (3y) + 6 * (x^2)^2 * (3y)^2 - 4 * (x^2) * (3y)^3 + (3y)^4$$
$$= x^8 - 12x^6y + 54x^4y^2 - 108x^2y^3 + 81y^4$$

5. Potenzen

$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a$$

a = Basis
n = Potenz

Bsp.:

$$2^5 = \prod_{i=1}^{5} 2 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 32$$

Gesetze:

$$a^n * b^n = (a * b)^n$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
$$a^m * a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

Bsp.:

$$2^2 * 3^2 = 4 * 9 = 36 \qquad (2 * 3)^2 = 6^2 = 36$$
$$2^3 * 2^4 = 8 * 16 = 128 \qquad 2^{3+4} = 2^7 = 128$$
$$(2^2)^3 = 4^3 = 64 \qquad 2^{2*3} = 2^6 = 64$$

6. Wurzeln

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

a = Radikand
n = Wurzelexponent

Gesetze:

$$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m*n]{a}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad b \neq 0$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Bsp.:

$$\sqrt[2]{32} * \sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{32 * 2} = 8$$
$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$
$$\frac{\sqrt[2]{12}}{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[2]{\frac{12}{3}} = 2$$
$$\left(\sqrt[2]{2}\right)^4 = \sqrt[2]{2^4} = 4$$

7. Logarithmen

Logarithmen werden benutzt um Gleichungen der Form:

$a^x = b$

zu lösen, wobei x die gesuchte Unbekannte ist.

$\log_a(b) = x$

Bsp.:

$2^{10} = 1024$

$\log_2(1024) = 10$

$3^x = 81$

$\log_3(81) = x = 4$

besondere Logarithmen:

natürlicher Logarithmus:	$\log_{\mathrm{e}}(x) = \ln(x)$
dekadischer Logarithmus:	$\log_{10}(x) = \lg(x)$
binärer Logarithmus:	$\log_2(x) = \mathrm{ld}(x)$

Gesetze:

$\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x^y) = y * \log_a(x)$

$x = y^{\log_y(x)}$

Bsp.:

$\log_2(4 * 8) = \log_2(32) = 5$	$\log_2(4) + \log_2(8) = 2 + 3 = 5$
$\log_2\left(\frac{8}{2}\right) = \log_2(4) = 2$	$\log_2(8) - \log_2(2) = 3 - 1 = 2$
$\log_2(4^3) = \log_2(64) = 6$	$3 * \log_2(4) = 3 * 2 = 6$

Basisumrechnung:

$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Bsp.:

$\log_2(\mathrm{e}) * \log_e(32) = \log_2(\mathrm{e}) * \frac{\log_2(32)}{\log_2(e)} = 5$