1. reelle Funktionen

Eine Funktion f ordnet dem Argument x der Funktion eindeutig einen Funktionswert y zu. Ist sowohl das Argument der Funktion, als auch der Funktionswert Teil der reellen Zahlen, so spricht man von einer reellen Funktion.

$$y = f(x)$$

Die Menge aller möglichen Argumente einer Funktion wird als Definitionsbereich bezeichnet und die Menge aller möglichen Funktionswerte als Wertebereich.

Bsp.:

$f(x) = 2x$
DB: $x \in \mathbb{R}$
WB: $y \in \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{5}{x-2}$
DB: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
WB: $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.1. Schnittpunkt mit der Ordinate (y-Achse)

Der Schnittpunkt einer Funktion mit Abszisse wird berechnet, indem für das Argument der Funktion 0 eingesetzt wird. Eine Funktion kann einen oder keinen Schnittpunkt mit der Abszisse besitzen.

$$f(0) = y$$

Bsp.:

$f(x) = x + 2$
$f(0) = 0 + 2 = 2$
$SP_y(0, 2)$

1.2. Schnittpunkte mit der Abszisse (x-Achse)

Schnittpunkte einer Funktion mit der Ordinate werden berechnet, indem für den Funktionswert 0 eingesetzt wird. Die Argumente für welche der zugehörige Funktionswert 0 ist werden auch Nullstellen genannt.

$$f(x) = 0$$

Bsp.:

$f(x) = x + 2$
$0 = x + 2$
$x = -2$
$SP_x(-2, 0)$

$f(x) = x^2 - 1$
$0 = x^2 - 1$
$1 = x^2$
$x = \pm 1$
$SP_{x1}(1,0) \qquad SP_{x2}(-1,0)$

1.2.1. pq-Formel

Quadratische Gleichungen können bis zu zwei Nullstellen haben. Wenn die Funktion in der Normalform ist können diese mittels der pq-Formel berechnet werden.

Normalform: $0 = x^2 + px + q$

pq-Fomel: $x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Bsp.:

$0 = 3x^2 + 24x + 21$
$0 = x^2 + 8x + 7$
$x_{1,2} = \frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 7} = -4 \pm \sqrt{16 - 7}$
$x_1 = -7 \qquad x_2 = -1$

1.2.2. Polynomdivision

Bei einer Polynomdivision wird ein Polynom durch ein anderes dividiert.
Ist der Grad einer Funktion zu hoch, um alle Nullstellen zu berechnen, kann dieser mittels einer Polynomdivision reduziert werden. Nachteil dieses Vorgehens ist, dass eine Nullstelle bekannt sein muss.

Das Prinzip der Polynomdivision ähnelt dem der schriftlichen Division.
Bsp.:

$$
\begin{array}{l}
162 \div 9 = 18 \\
1 \\
\underline{-0} \\
16 \\
\underline{-9} \\
72 \\
\underline{-72} \\
0
\end{array}
$$

Bei der Polynomdivision wird schrittweise der Summand mit der höchsten Potenz des Zählers durch den Summand mit der höchsten Potenz des Nenners geteilt. Das Ergebnis dieser Division wird mit dem gesamten Nenner multipliziert und dann von dem Zähler abgezogen. Dies wird solange wiederholt, bis auf diese Weise alle Summanden des Zählers abgearbeitet wurden.

Bsp.:

$$
\begin{array}{lll}
(3x^3+6x^2-2x-5) \div (x+1) = 3x^2+3x-5 & & \\
\underline{-(3x^3+3x^2)} & 3x^3 \div x = 3x^2 & 3x^2 * (x+1) = 3x^3+3x^2 \\
\quad 3x^2-2x & & \\
\quad \underline{-(3x^2+3x)} & 3x^2 \div x = 3x & 3x * (x+1) = 3x^2+3x \\
\qquad -5x-5 & & \\
\qquad \underline{-(-5x-5)} & -5x \div x = -5 & -5 * (x+1) = -5x-5 \\
\qquad\qquad 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(2x^3+8x^2+5x-6) \div (2x^2+4x-3) = x+2 \\
\underline{-(2x^3+4x^2-3x)} \\
\quad 4x^2+8x-6 \\
\quad \underline{-(4x^2+8x-6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

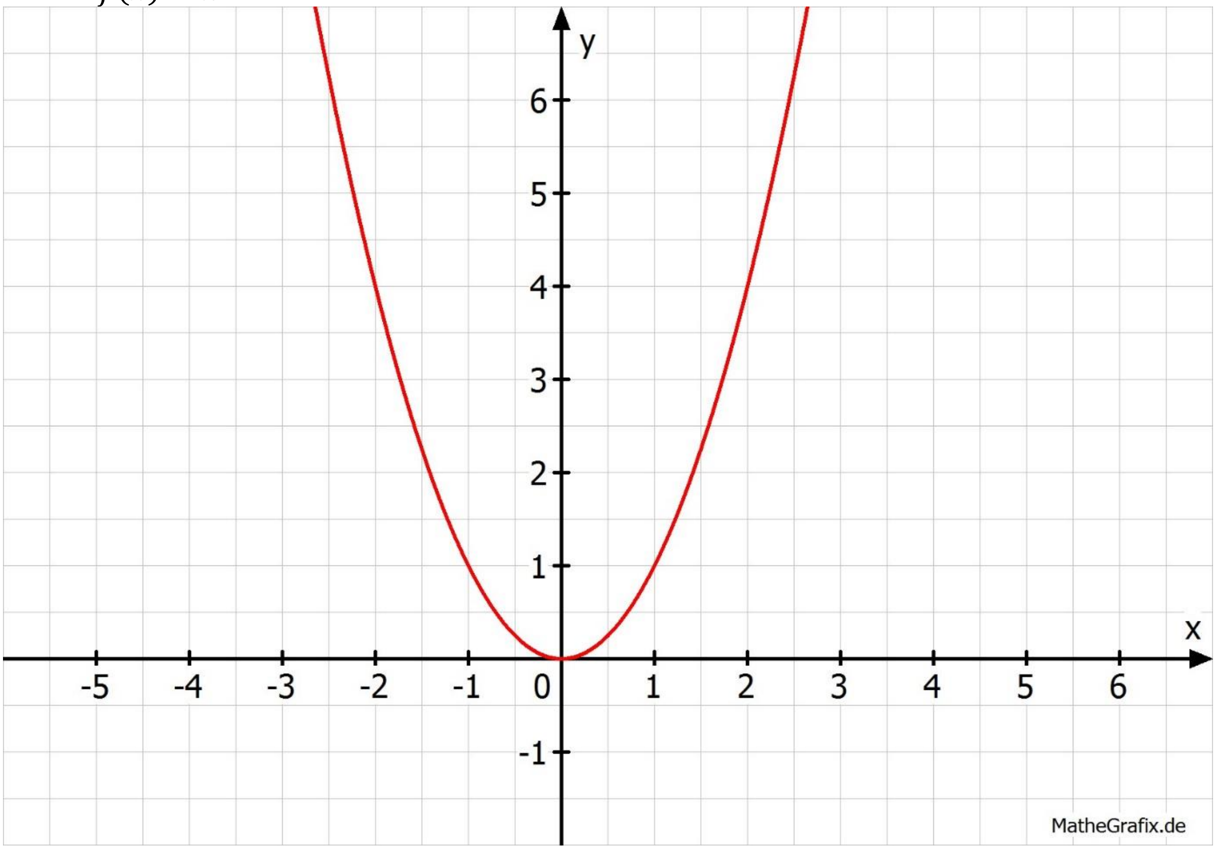
1.3. Achsensymmetrie zur y-Achse

Eine Funktion die achsensymmetrisch zu der y-Achse ist heißt gerade.

$f(x) = f(-x)$

Bsp.:

$f(x) = x^2$



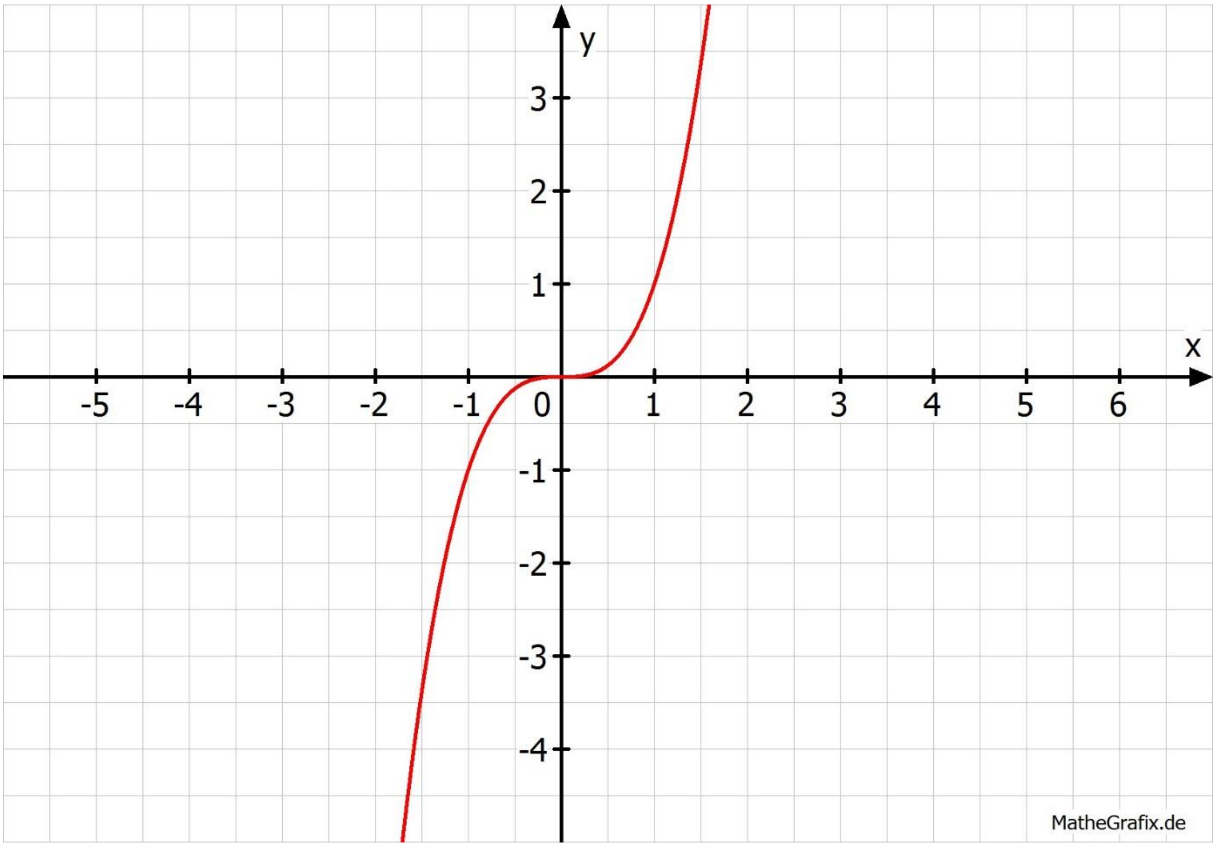
1.4. Punktsymmetrie zum Ursprung

Eine Funktion die punktsymmetrisch zu dem Ursprung ist heißt ungerade.

$$f(x) = -f(-x)$$

Bsp.:

$$f(x) = x^3$$



2. Geraden

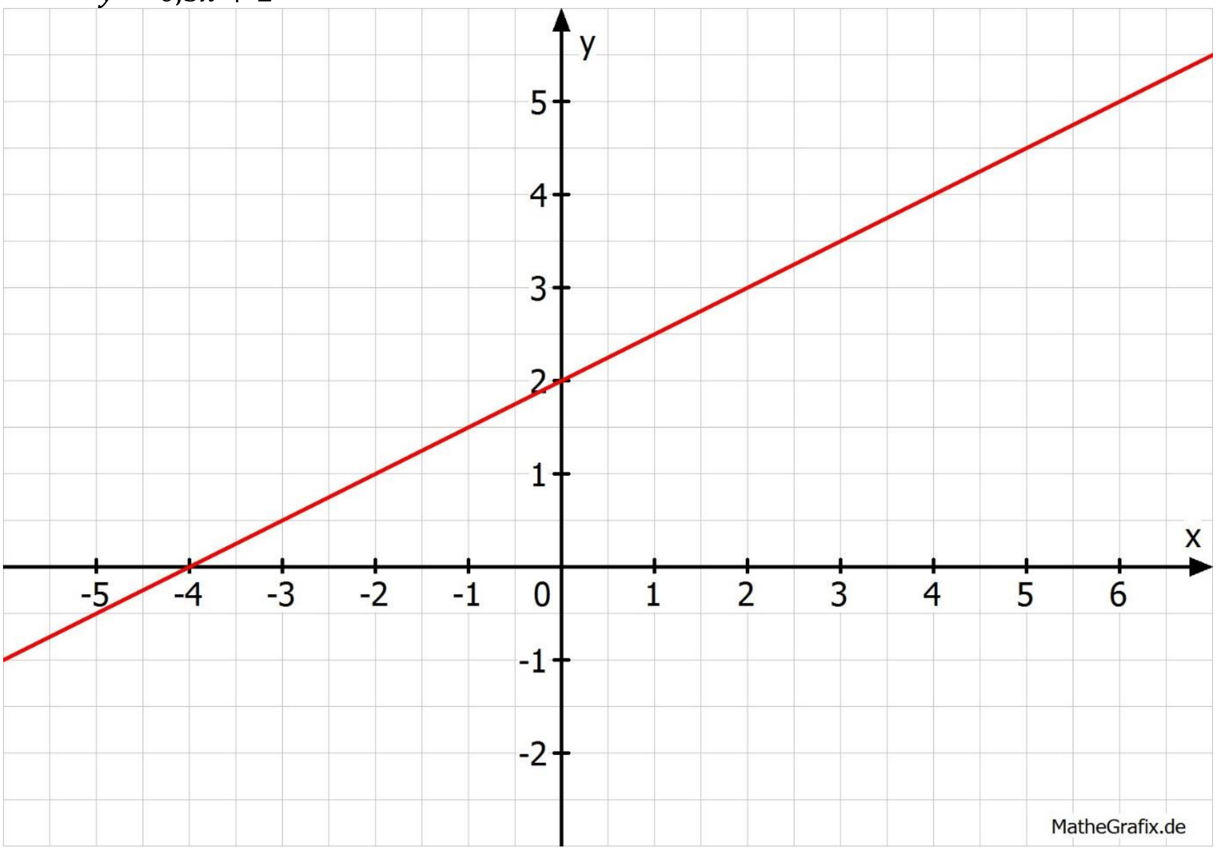
In den zwei dimensionalen Räumen wird eine Gerade mittels der folgenden Gleichung beschrieben:

$$y = mx + n$$

x ist dabei weiterhin das Argument der Funktion und y der Funktionswert. m ist der Anstieg der Gerade und n eine Verschiebung entlang der y-Achse.

Bsp.:

$$y = 0{,}5x + 2$$



2.1. Anstieg einer Gerade

Sind zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$ einer Gerade bekannt kann mittels der folgenden Formel der Anstieg berechnet werden:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Betrachten man zwei Geraden und es gilt:

$$m_1 * m_2 = -1$$

so stehen die Geraden senkrecht aufeinander.

Bsp.:

$$P_1(1{,}0)\ P_2(3{,}4)$$

$$m = \frac{4-0}{3-1} = 2$$

2.2. Tangenten

Eine Tangente ist eine Gerade, welche eine Kurve in einem Punkt berührt. Ist eine Funktion gegeben kann an jeder Stelle eine Tangente angelegt werden.

Bsp.:

$f(x) \;=\; -(x-1)^2+3$
Gesucht: die Tangente $y=mx+n$an der Stelle $x=2$
Gegeben: $m=-2\;f$ür $x=2$
$y=f(2)=2$
x, y und m in die Tangentengleichung einsetzen: $2=-2*2+n$
$n=6$
Tangentengleichung allgemein: $y=-2x+6$