8. Schwerpunkt: Winkelfunktionen und ihre Umkehrung

Bestimmen Sie die vollständigen Lösungsmengen für x. Sofern es sich bei x um einen Winkel handelt, sind die Lösungen im Gradmaß und im Bogenmaß anzugeben.

0.8.1.T

$(k \in \mathbb{Z})$

a)

$x = \sin(315°)$

$\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}}}$

b)

$x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$

c)

$x = \tan(225°)$

$\underline{\underline{x = 1}}$

d)

$x = \cot(0°)$

$\underline{\underline{x = \text{n.d.}}}$

e)

$\sin(x) = 0{,}5$

$\underline{\underline{x_1 = 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi}}$

$\underline{\underline{x_2 = 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi}}$

f)

$\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\underline{\underline{x_1 = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi}}$

$\underline{\underline{x_2 = -45° + k \cdot 360° = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi}}$

g)

$\tan(x) = -1$

$\underline{\underline{x = -45° + k \cdot 180° = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi}}$

h)

$\cot(x) = \sqrt{3}$

$\underline{\underline{x_1 = 30° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi}}$

i)

$x = \arcsin(-1)$

$\underline{\underline{x = -90° = -\frac{\pi}{2}}}$

j)

$x = \arccos(0)$

$\underline{\underline{x = 90° = \frac{\pi}{2}}}$

k)

$x = \arctan(1)$

$\underline{\underline{x = 45° = \frac{\pi}{4}}}$

l)

$x = \operatorname{arccot}(\sqrt{3})$

$\underline{\underline{x = 30° = \frac{\pi}{6}}}$

arcus-Funktionen sind **eindeutig** definiert, haben also nur **eine** Lösung

Geben Sie die vollständigen Lösungsmengen der Gleichungen an:

0.8.2.T a)

$$\sin(2t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2t_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \rightarrow t_1 = 30^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$2t_2 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \rightarrow t_2 = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$\underline{\underline{L = \{t = 30^\circ + k \cdot 180^\circ \text{oder } t = 60^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}}}$$

b)

$$\cos(3t) = \sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{L = \emptyset}}$$

c)

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{\varphi}{2} = 30^\circ + k \cdot 180^\circ \rightarrow \varphi = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\underline{\underline{L = \{\varphi = 60^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}}}$$

d)

$$2\cos(0{,}3x) - 5 = 0$$

$$\cos(0{,}3x) = 2{,}5$$

$$\underline{\underline{L = \emptyset}}$$

e)

$$\sin^2(2x) + \cos^2(2x) = 1$$

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

$\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$ (x beliebig)

f)

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{ein Faktor Null!}$$

$$\frac{x_1}{2} = k \cdot 180^\circ \quad \rightarrow \quad x_1 = k \cdot 360^\circ$$

$$\frac{x_2}{3} = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \rightarrow x_2 = 270^\circ + k \cdot 540^\circ$$

$$\underline{\underline{L = \{x = k \cdot 360^\circ \text{oder } x = 270^\circ + k \cdot 540^\circ, k \in \mathbb{Z}\}}}$$

g)

$$4\cos^2(x) + 16\cos(x) - 9 = 0$$

Substitution: $\cos(x) = u$

$$4u^2 + 16u - 9 = 0$$

$$u^2 + 4u - \frac{9}{4} = 0$$

$$u_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = 2 \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = 2 \pm \frac{5}{2}$$

$$u_1 = 4{,}5 \quad \text{entfällt wegen } |\cos(x)| \leq 1$$

$$u_2 = -0{,}5$$

Rücksubstitution:

$$\cos(x) = -0{,}5$$

$$x_1 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x_2 = 240^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\underline{\underline{L = \{x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ oder } x = 240^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}}}$$