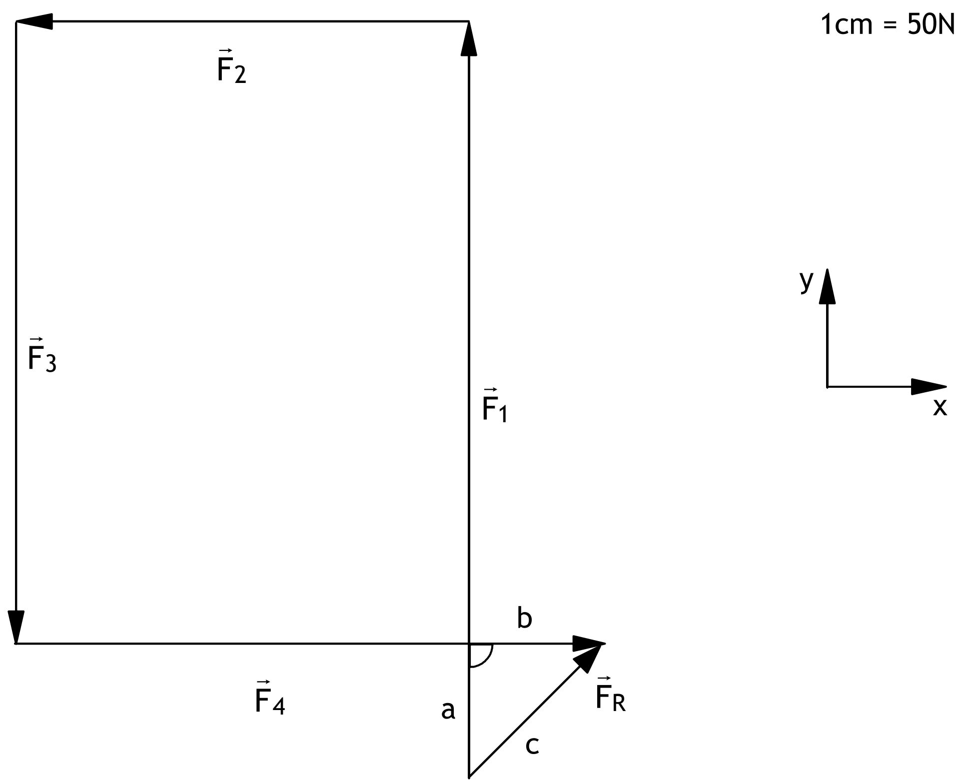
6. Schwerpunkt Grundlagen der Vektorrechnung

0.6.1.T In einem Punkt greifen 4 Kräfte an, wobei F_1=500N nach Norden, F_2=300N nach Westen und F_3=400N nach Süden zieht. Wie groß muß die nach Osten gerichtete Kraft F_4 sein, damit die resultierende Kraft F_R genau nach Nordosten zeigt. Welchen Betrag hat dann F_R?



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_R$$

$$N \triangleq y; \quad O \triangleq x$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -300 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -400 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

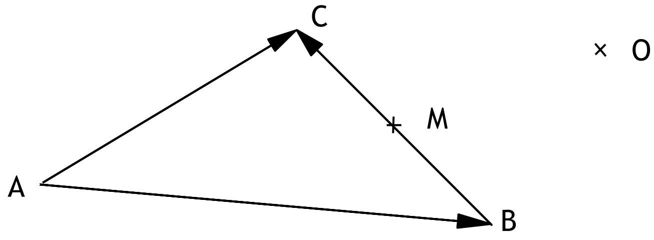
$$-300 + x = a$$
$$100 = a$$
$$x = a + 300 = 400$$
$$\vec{F}_4 = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{F}_R\right| = 100 \cdot \sqrt{2}\,N = 141{,}4N$$

0.6.2.T Die Punkte $A(1|1|1)$; $B(-1|5|3)$; $C(-4|-3|-3)$ bestimmen ein Dreieck.

Skizze:



a) Berechnen Sie den Umfang dieses Dreiecks.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{109}$$

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{57}$$

$$u = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CA}\right| \approx 22{,}89\,\mathrm{LE}$$

b) Geben Sie den Vektor von A zum Mittelpunkt M der Seite $\overline{BC}$ an.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie den Ortsvektor zum Punkt M an.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie einen Vektor an, der den Innenwinkel in Punkt A halbiert.

$$\cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{AB};-\overrightarrow{CA}\right)\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\left(-\overrightarrow{CA}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-5\\-4\\-4\end{pmatrix}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{57}} = \frac{10-16-8}{6\sqrt{38}} \approx -0{,}37857$$

$$\measuredangle\left(\overrightarrow{AB};-\overrightarrow{CA}\right) = 112{,}24^\circ$$

0.6.3.T a) Finden Sie die Menge aller Vektoren $\vec{c}$, die zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind.
b) Bestimmen Sie einen Einheitsvektor $\vec{e}_c$, der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = k\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = k\cdot\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix} \quad ;k\in\mathbb{R}$$

$$\vec{e}_c = \frac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+2^2}}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}$$

0.6.4.T Finden Sie einen Punkt D, so dass er zusammen mit den Punkten A, B, C ein Parallelogramm bildet $A(2|3|5)$; $B(-1|4|7)$; $C(5|6|9)$. Berechnen Sie den Umfang des Parallelogramms und geben Sie die Diagonalenvektoren an.

Bedingung für Parallelogramm:
gegenüberliegende Seiten vektorgleich
es gibt genau 3 Möglichkeiten das Dreieck zum Parallelogramm zu ergänzen.
eine Möglichkeit:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\7\\11\end{pmatrix} = \overrightarrow{OD}$$

$$D(2|7|11)$$

Umfang: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}; \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

$$u = 2 \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| + 2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| = 2 \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} + 2 \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + 4^2} \approx 19{,}15\,LE$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Diagonalenvektoren:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Skizze: