3. Gleichungen und Ungleichungen einer Variable

Äquivalenzumformungen lassen die Lösungsmenge unverändert. Dazu gehört:

1. Es wird auf beiden Seiten dasselbe addiert oder subtrahiert.
   „Dasselbe“ kann eine beliebige Zahl sein (z.B. 13) oder eine Variable (z.B. x) oder auch ein komplizierterer Ausdruck (z. B. (2x – 4)) .

2. Beide Seiten der Gleichung werden mit demselben multipliziert.
   Hier muss man aufpassen, dass man nicht mit Null multipliziert. Dabei wird nämlich sogar eine falsche Gleichung richtig, nämlich zu 0 = 0, und das darf nicht passieren. (auch nicht aus Versehen: bei Multiplikation mit (2x – 4) würde man nämlich dann mit Null multiplizieren haben, wenn x gerade 2 wäre)

3. Beide Seiten der Gleichung werden durch dasselbe dividiert, wobei man auch nicht durch Null dividieren darf!

Quadratische Gleichungen bringt man in die Normalform: $x^2 + px + q = 0$

und löst sie mit der auswendig gelernten Formel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Bei **Wurzelgleichungen** werden die Wurzeln i.a. durch Quadrieren beseitigt.
(Weil Quadrieren keine Äquivalenzoperation ist, muss man am Ende stets eine Probe machen.)

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = 5$$

Vor dem Quadrieren die Wurzeln „gleichmäßig“ verteilen verringert oft den Aufwand

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2} &= 5 - \sqrt{x-3} && \left|(\ldots)^2\right. \\
x+2 &= 25 - 10\sqrt{x-3} + x - 3 \\
10\sqrt{x-3} &= 20 \\
\sqrt{x-3} &= 2 && \left|(\ldots)^2\right. \\
x-3 &= 4 \\
x &= 7
\end{aligned}$$

Die Probe zeigt, dass diese Lösung stimmt.