2. Definitionsbereich mathematischer Terme

Teil A Zahlenmengen

allg.: Menge = Zusammenfassung unterschiedlicher Elemente zu einer Einheit

Symbol	Beschreibung	Beispiele
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	1; 2; 3; ...
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	0; 1; -1; 2; -2; ...
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	0; 1; 0,5; -0,5; 0,25;...
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen (rational+irrational)	0; $\sqrt{2}$; π; ...
$\mathbb{R}^2$	Menge der geordneten Zahlenpaare (x,y)	(0; 0); (1; -99); ...
$\mathbb{R}^3$	Menge der geordneten Zahlentripel (x,y,z)	(1; -3; 7)
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	1+5i

Ein Element x gehört entweder zu einer Menge A ($x \in A$), oder nicht ($x \notin A$).

Eine Menge ohne Elemente heißt leere Menge mit dem Symbol $\{\ \}$ oder $\varnothing$.

Die Elemente einer endlichen Menge an kann man in geschweiften Klammern aufzählen, z.B. $A = \{0;3;6;9\}$ $B = \{2;4;6\}$

Mengenoperation	Symbol	In Worten	Ergebnis
Vereinigungsmenge	$A \cup B$	A vereinigt mit B	$\{0;2;3;4;6;9\}$
Schnittmenge	$A \cap B$	A geschnitten mit B	$\{6\}$
Differenzmenge	$A \setminus B$	A ohne B	$\{0;3;9\}$

Intervalle im Bereich der reellen Zahlen

Abgeschlossenes Intervall	$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$
Offenes Intervall	$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Rechtsoffenes Intervall	$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$
Linksoffenes Intervall	$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$

Die Intervallgrenzen $+\infty$ oder $-\infty$ sind offen, z.B. $[0;+\infty)$

Teil B Definitionsbereiche

Der Definitionsbereich für eine Variable in einem Term ist die Menge aller Zahlen, die man für diese Variable einsetzen kann, ohne dass eine verbotene Rechenoperation entsteht. Dazu gehören insbesondere:

1. Division durch Null
2. geradzahlige Wurzeln (speziell Quadratwurzel) aus einer negativen Zahl
3. Logarithmus von nicht positiven Zahlen
4. arcsin und arccos von Zahlen, die nicht zwischen -1 und +1 liegen

1. Beispiel:

$$\frac{1}{x-2} = \sqrt{x+1}$$

a) Man darf nicht durch Null dividieren: $x - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2$

b) Man kann keine Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen:
$x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1$

Damit darf x als reelle Zahl nur unter den Bedingungen $x \neq 2$ und $x \geq -1$ vorkommen. In der Sprache der Mathematik schreibt man für die Definitionsmenge D dann wie folgt:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ und } x \geq -1\}$$

Der senkrechte Strich | in der Klammer heißt ausgesprochen: „mit der Eigenschaft“

2. Beispiel:

$$T(x) = \log(1{,}5 - x) + \arcsin(0{,}5x)$$

a) Logarithmus $1{,}5 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1{,}5 \qquad D_a = (-\infty; 1{,}5)$

b) Arkussinus $-1 \leq 0{,}5x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq x \leq 2 \qquad D_b = [-2; 2]$

$$D = D_a \cap D_b = [-2; 1{,}5) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1{,}5\}$$