3. Lambda – Ansatz

Geeignet für lineare homogene DGL mit konstanten reellen Koeffizienten.

Normalform: $a_n y^{(n)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

Charakteristische Gleichung: $a_n \lambda^n + \ldots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

Der Lambda-Ansatz liefert ein Polynom mit denselben Koeffizienten wie die DGL. Es hat n Lösungen, die einfach, mehrfach reell oder zueinander konjugiert komplex ein können.

einfache reelle Lösung λ $\Rightarrow$ eine Teillösung $y_1 = C_1 \cdot \exp(\lambda x)$

k-fache reelle Lösungen λ $\Rightarrow$ k Teillösungen $y_j = C_j \cdot x^{j-1} \exp(\lambda x)$ j=1,...,k

2 konjugiert komplexe Lösungen $\lambda_{1,2} = a \pm j\omega$ $\Rightarrow y_{1,2} = e^{ax}\left(A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x)\right)$

Die allgemeine Lösung der DGL ist die Summe aller Teillösungen

Beispiele

$y' + 4y = 0$

$\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -4 \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-4x}$

$y'' + 2y' + y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-1} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

$y'' + 4y = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda^2 = -4 \quad \lambda_{1/2} = 0 \pm 2j \quad \Rightarrow \quad y = A\cos(2x) + B\sin(2x)$

$y^{(5)} + 9y^{(4)} + 35y''' + 79y'' + 104y' + 60y = 0$

$\lambda^5 + 9\lambda^4 + 35\lambda^3 + 79\lambda^2 + 104\lambda + 60 = 0$ mit den Lösungen

$\lambda_1 = -3$ einfach reell

$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ doppelt reell

$\lambda_{4/5} = -1 \pm 2j$ zueinander konjugiert komplex

$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + e^{-x}\left(C_4 \cos(2x) + C_5 \sin(2x)\right)$