5. Differentialgleichungen der Elektrotechnik

In einer elektrischen Schaltung genügen die Ströme prinzipiell dem Knotensatz und die Spannungen der Maschenregel, und zwar auch wenn sich Ströme und Spannungen mit der Zeit verändern. Betrachtet man den eingeschwungenen Zustand und sinusförmige Wechselspannungen, so lassen sich die Verhältnisse gut mit dem Formalismus der komplexen Zahlen beschreiben.

Zur korrekten Beschreibung von Schaltvorgängen und von Einschwingvorgängen sind die Spannungen an ohmschen Widerständen R, an Induktivitäten L und Kapazitäten in Abhängigkeit vom Strom i(t) wie folgt beschreiben:

Spannung an ohmschen Widerstand: $u_R = R \cdot i(t)$

Spannung an Induktivität: $u_L = L \cdot \dfrac{di(t)}{dt}$

Spannung an Kapazität: $u_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)\,dt + u(0)$

Wegen des Integrals für u_C erhält man eine Differentialgleichung erst nach Differentation nach der Zeit t ! Dabei wird ausgenutzt, dass das Diffenzieren nach t das Integral mit der oberen Grenze t wieder aufhebt:

$$\frac{d}{dt}u_C = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + u(0)\right) = \frac{1}{C}i(t)$$

Beispiel

Eine Reihenschaltung von R, L und C (entladen!) wird zur Zeit t = 0 mit einer sinusförmigen Wechselspannung verbunden (Amplitude U_A und Frequenz f_A).

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t di(t)\,dt = U_A \sin(\omega_A t) \qquad \left|\frac{d}{dt}\right.$$

$$L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = U_A \omega_A \cos(\omega_A t) \quad \Rightarrow \quad \text{inhom. DGL mit konst. Koeff.}$$