4. Ansatz einer partikulären Lösung für eine inhomogene DGL

Für eine lin. inhom. DGL mit konstanten Koeffizienten

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = s(x)$$

ergibt sich die allg. Lösung aus der Summe der Lösung der zugehörigen homogenen DGL y_H und einer partiellen Lösung y_P der inhomogenen DGL.

$$y = y_H + y_P$$

Finden der partiellen Lösung bei bestimmten Störfunktionen durch geeigneten Ansatz

a) $s(x) = a \cdot \exp(bx)$ $\qquad$ $y_P = A \cdot \exp(bx)$

b) $s(x) = a \cdot \cos(cx) + b \cdot \sin(cx)$ $\qquad$ $y_P = A \cdot \cos(cx) + B \cdot \sin(cx)$

c) $s(x) = a \cdot \cosh(cx) + b \cdot \sinh(cx)$ $\qquad$ $y_P(x) = A \cdot \cosh(cx) + B \cdot \sinh(cx)$

d) $s(x) = a_0 + a_a x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ $\qquad$ $y_P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m$

e) **Resonanzfall:** Ist eine so zu bildende partikuläre Lösung bereits Teillösung der zugehörigen homogenen DGL, so muss sie zusätzlich mit der unabhängigen Variablen x multipliziert werden. (Ist diese auch Teillösung, ist die Multiplikation zu wiederholen.)

f) Ist s(x) eine **Linearkombination** obiger Typen, so ist für y_P eine ebensolche Linearkombination anzusetzen.

Der geeignete Ansatz für die partikuläre Lösung ist mit seinen zugehörigen Ableitungen in die inhomogene DGL einzusetzen. Dann können die im Ansatz enthaltenen Konstanten durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Beispiel

$$\dot{y} + 5y = \sin(t) + 2\cos(t)$$

$$\dot{y} + 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -5 \quad \Rightarrow y_H = Ce^{-5t}$$

$$\text{Ansatz:} \quad y_P = A\sin(t) + B\cos(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_P = A\cos(t) - B\sin(t)$$

$$\text{einsetzen:} \quad A\cos(t) - B\sin(t) + 5\big(A\sin(t) + B\cos(t)\big) = \sin(t) + 2\cos(t)$$

$$\text{Koeffizientenvergleich} - \text{für } \sin(t): \quad 5A - B = 1$$

$$\text{für } \cos(t): \quad A + 5B = 2$$

$$\Rightarrow A = \frac{7}{26} \text{ und } B = \frac{9}{26} \qquad y_P = \frac{7}{26}\sin(t) + \frac{9}{26}\cos(t)$$

$$y = y_H + y_P = Ce^{-5t} + \frac{7}{26}\sin(t) + \frac{9}{26}\cos(t)$$