2. Trennen der Variablen

In einigen Fällen lassen sich bei einer DGL 1. Ordnung die abhängige und die unabhängige Variable getrennt auf beide Seiten der Gleichung bringen.

2.1 Die erste Ableitung ist ein Produkt zweier nur jeweils von einer Variable abhängiger Terme g(x) und h(y):

Indem man die erste Ableitung als Differentialquotient auffaßt, ist ein Variablen-Trennen leicht möglich. Anschließend werden beide Seiten integriert.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \qquad \Rightarrow \qquad \text{Trennen der Variablen}$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \text{nun beide Seiten integrieren}$$

Beispiel

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Trennen der Variablen}$$

$$y\,dy = \sqrt{x}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \text{beide Seiten integrieren}$$

$$\int y\,dy = \int \sqrt{x}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \text{unbestimmtes integrieren}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C \qquad \Rightarrow \qquad \text{nur eine Integrationskonstante C}$$

$$y_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{x} + 2C} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Vorzeichen folgt erst aus Anfangsbedingung}$$

2.2* Die erste Ableitung ist die Funktion einer Linearkombination ay+bx+c

Dieser Fall lässt sich durch eine Substitution z = ay+bx+c auf das Trennen der Variablen für eine DGL der Funktion z(x) zurückführen. Aus z kann man dann y bestimmen.

Beispiel **(Zusatzstoff – nicht in Vorlesung behandelt – kein Prüfungsinhalt !)**

$y' = 3y - 2x + 5 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Substitution } z = 3y - 2x + 5$

Substitutionsgleichung differenzieren $\qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{dz}{dx} = 3\dfrac{dy}{dx} - 2$

$\qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3}\left(2 + \dfrac{dz}{dx}\right)$

$\dfrac{1}{3}\left(2 + \dfrac{dz}{dx}\right) = z \qquad \Rightarrow \qquad$ Auflösen nach Differenzialquotient

$\dfrac{dz}{dx} = 3z - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \text{DGL für } z = f(x)$

$\qquad \Rightarrow \qquad$ Lösung durch Variablen – Trennung

$$\frac{dz}{3z-2} = dx \qquad \Big| \int \ldots$$

$$\frac{1}{3}\ln|3z-2| = x + C$$

$|3z-2| = e^{3C+3x} = e^{3C}e^{3x} = \tilde{C}e^{3x} \qquad$ wobei $\tilde{C} > 0$

$3z - 2 = Ke^{3x} \qquad$ wobei $K = \pm\tilde{C}$, also $K \in \mathbb{R}$

Rücksubstitution für z liefert

$3(3y - 2x + 5) - 2 = Ke^{3x} \qquad$ Auflösen nach y ergibt schließlich

$y = \dfrac{1}{9}\left(Ke^{3x} + 6x - 13\right) \qquad$ allgemeine Lösung