Gewöhnliche Differentialgleichungen

0. Grundlagen

In einer Differenzialgleichung (**DGL**) sind eine oder mehrere Ableitungen einer unbekannten Funktion sowie ggf. die Funktion selber und unabhängige Variable enthalten. Es ist das Ziel, alle Funktionen zu finden, welche die DGL erfüllen.

Ist die gesuchte Funktion nur von einer Unabhängigen abhängig, wie z.B. bei y = f(x), dann spricht man von einer **gewöhnlichen DGL**. Gibt es mehrere Unabhängige, so sind die Ableitungen partiell und man spricht von **partiellen DGL**.

$$y''' + 3y'' - xy' + y = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \text{gewöhnliche DGL}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = r \quad \Rightarrow \quad \text{partielle DGL}$$

Zur Suche der passenden Lösungsfunktionen gibt es unterschiedliche Methoden, die vom Typ der DGL abhängen. Deshalb ist es sinnvoll, gegebene gewöhnliche DGL nach bestimmten Kriterien klassifizieren zu können:

a) Die höchste vorkommende Ableitung entspricht der **Ordnung** der DGL.

$$y''' + 3y'' - xy' + y = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \text{DGL 3. Ordnung}$$

b) Ist eine DGL nach der höchsten Ableitung aufgelöst heißt sie **explizit,** anderenfalls heißt die DGL **implizit**.

$$y''' + 3y'' - xy' + y = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \text{implizite DGL}$$

$$y'' = \frac{x}{y + 3y'} \quad \Rightarrow \quad \text{explizite DGL}$$

c) Kommt die Funktion, ihre Ableitungen und Produkte aus diesen nur in ganzzahligen Potenzen vor, so entspricht die höchste vorkommende Potenz dem **Grad** der DGL.

$$\ddot{y} + 3y^2 = t^3 \quad \Rightarrow \quad \text{2. Grades wegen } y^2$$

$$y'' + 3y'y^2 + x^4 y = e^x \quad \Rightarrow \quad \text{3. Grades wegen } y'y^2$$

$$y'' + y' + \sqrt{xy} = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \text{Grad ist wegen } \sqrt{y} \text{ nicht angebbar}$$

d) Eine DGL ersten Grades heißt auch **lineare DGL**.

$$y''' + 3y'' - xy' + y = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \text{DGL 1. Grades} \mathrel{\hat{=}} \text{lineare DGL}$$

e) Besonders einfach ist eine lineare DGL mit **konstanten Koeffizienten** $a_i \in \mathbb{R}$ **,** aufgeschrieben in der sogenannten **Normalform:**

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = s(x) \qquad \text{allgemein}$$

$$y''' + 5y'' - 8y' + 4y = \sin(x) \qquad \text{konstante Koeffizienten}$$

f) Steht in der Normalform rechts eine Funktion der Unabhängigen, die sogenannte Störfunktion $s(x)$, so ist die DGL **homogen**, anderenfalls ist sie **inhomogen**.

$$y''' + 5y'' - 8y' + 4y = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \text{inhomogen}$$
$$y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{homogen}$$

g) Die **allgemeine Lösung** einer DGL n-ter Ordnung besitzt n frei wählbare Konstanten.

$$y = Ce^{-2x} \qquad \text{passt mit jedem C in die DGL} \qquad y' + 2y = 0$$

h) Mit Hilfe von Zusatzbedingungen können ggf. diese Konstanten bestimmt werden. Die so erhaltene Lösung heißt **spezielle Lösung**.

$$y = 4e^{-2x} \qquad \text{passt in DGL} \quad y' + 2y = 0 \quad \text{und erfüllt } y(0) = 4 \quad \text{(Anfangsbedingung)}$$

i) Liegen Zusatzbedingungen an nur einer Stelle x_0 vor, sind es **Anfangsbedingungen**. Bei einem **Anfangswertproblem** sind die DGL und Anfangsbedingungen gegeben.

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4 = 0 \qquad y(2) = 8;\ \dot{y}(2) = 16 \qquad \Rightarrow \text{Anfangswertaufgabe}$$

j) Liegen Zusatzbedingungen an mehreren Stellen vor, sind es **Randbedingungen**. Bei einem **Randwertproblem** sind die DGL und Randbedingungen gegeben.

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4 = 0 \qquad y(0) = 8;\ \dot{y}(2) = 0 \qquad \Rightarrow \text{Randwertwertaufgabe}$$