# 1. Differentialgleichungen

1.5 Lösen Sie die linearen inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für folgende Schaltungsanordnungen.

**Aufgabe 1.5.1**

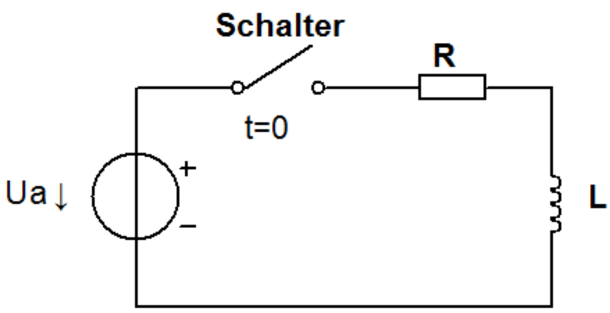
Zur Zeit $t = 0$ wird die RL-Reihenschaltung an die Spannung $u_a = f(t)$ angeschlossen. Berechnen Sie den Zeitverlauf von $i(t)$ für folgende Bedingungen:

a) $u_a = \hat{u}$

b) $u_a = at$

c) $u_a = \hat{u}\sin(\omega t)$

d) $u_a = \hat{u}\cos(\omega t)$




Maschengleichung:

$$u_R = Ri$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$u_a = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{u_a}{R} = i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt} \qquad \text{(DGL)}$$

zugeh. homogene Lösung:

$$0 = i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt}$$

$$0 = \frac{L}{R}\lambda + 1$$

$$\lambda = -\frac{R}{L} \quad \rightarrow \quad i_h = Ke^{-\frac{R}{L}t} \quad (\text{homogene Lösung})$$

a) $u_a = \hat{u}$

partikuläre Lösung:

$$\frac{\hat{u}}{R} = i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt}$$
$$i_p = A$$
$$\frac{di_p}{dt} = 0$$

$i_p, \frac{di_p}{dt}$ in DGL:

$$\frac{\hat{u}}{R} = A + \frac{L}{R} \cdot 0$$
$$A = \frac{\hat{u}}{R}$$
$$i_p = \frac{\hat{u}}{R}$$
$$i = i_h + i_p$$
$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\hat{u}}{R}$$

mit Anfangsbed. $i(0) = 0$

$$0 = K + \frac{\hat{u}}{R}$$
$$K = -\frac{\hat{u}}{R}$$
$$i(t) = -\frac{\hat{u}}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\hat{u}}{R}$$

b) $u_a = at$

partikuläre Lösung:

$$\frac{at}{R} = i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt}$$
$$i_p = At + B$$
$$\frac{di_p}{dt} = A$$

$i_p, \frac{di_p}{dt}$ in DGL:

$$\frac{at}{R} = At + B + \frac{L}{R}A$$
$$t: \quad A = \frac{a}{R}$$
$$t^0: \quad 0 = B + \frac{L}{R}A \quad \rightarrow \quad 0 = B + \frac{L}{R}\frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad B = -\frac{La}{R^2}$$
$$i_p = \frac{a}{R}t - \frac{La}{R^2}$$
$$i = i_h + i_p$$
$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{a}{R}t - \frac{La}{R^2}$$

mit Anfangsbed. $i(0) = 0$

$$0 = K - \frac{La}{R^2}$$
$$K = \frac{La}{R^2}$$
$$i(t) = \frac{a}{R}t - \frac{La}{R^2}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

c) $u_a = \hat{u}\sin(\omega t)$

partikuläre Lösung:

$$\frac{\hat{u}\sin(\omega t)}{R} = i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt}$$

$$i_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\frac{di_p}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$i_p, \frac{di_p}{dt}$ in DGL:

$$\frac{\hat{u}\sin(\omega t)}{R} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{L}{R}\left(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right)$$

$$\sin(\omega t): \quad (\mathrm{I}) \quad \frac{\hat{u}}{R} = B - \frac{LA\omega}{R}$$

$$\cos(\omega t): \quad (\mathrm{II}) \quad 0 = A + \frac{LB\omega}{R}$$

nach Lösung des LGS:

$$A = \frac{-L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}, \quad B = \frac{R\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}$$

$$i_p = -\frac{L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\cos(\omega t) + \frac{R\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\sin(\omega t)$$

$$i = i_h + i_p$$

$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t} - \frac{L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\cos(\omega t) + \frac{R\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\sin(\omega t)$$

mit Anfangsbed. $i(0) = 0$

$$0 = K - \frac{L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}$$

$$K = \frac{L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}$$

$$i(t) = \frac{L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\cos(\omega t) + \frac{R\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\sin(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\left(\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\cos(\omega t) + \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\sin(\omega t)\right)$$

d) $u_a = \hat{u}\cos(\omega t)$

partikuläre Lösung:

$$\frac{\hat{u}\cos(\omega t)}{R} = i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt}$$
$$i_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$
$$\frac{di_p}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$i_p, \frac{di_p}{dt}$ in DGL:

$$\frac{\hat{u}\cos(\omega t)}{R} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{L}{R}\left(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right)$$
$$\sin(\omega t): \quad (I) \quad 0 = B - \frac{LA\omega}{R}$$
$$\cos(\omega t): \quad (II) \quad \frac{\hat{u}}{R} = A + \frac{LB\omega}{R}$$

nach Lösung des LGS:

$$A = \frac{R\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}, \quad B = \frac{L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}$$
$$i_p = \frac{R\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\cos(\omega t) + \frac{L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\sin(\omega t)$$
$$i = i_h + i_p$$
$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\cos(\omega t) + \frac{L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\sin(\omega t)$$

mit Anfangsbed. $i(0) = 0$

$$0 = K +$$
$$K = -\frac{R\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}$$
$$i(t) = -\frac{R\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\cos(\omega t) + \frac{L\omega\hat{u}}{(L\omega)^2 + R^2}\sin(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\left(-\frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\cos(\omega t) + \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\sin(\omega t)\right)$$

**Aufgabe 1.5.2**

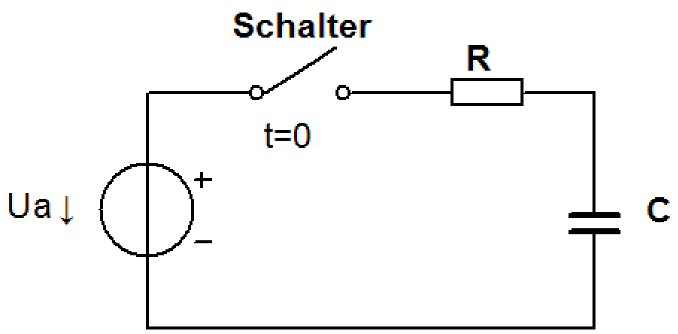
Zur Zeit $t=0$ wird die RC-Reihenschaltung an die Spannung $u_a = f(t)$ angeschlossen. Der Kondensator trage die Anfangsspannung $U_0$. Berechnen Sie den Zeitverlauf von $i(t)$ für die folgenden Bedingungen. Untersuchen Sie jeweils auch den Spezialfall für $U_0 = 0V$.

a) $u_a = \hat{u}$

b) $u_a = at$

c) $u_a = \hat{u}\sin(\omega t)$

d) $u_a = \hat{u}\cos(\omega t)$




Maschengleichung:

$$u_R = Ri$$

$$u_C = U_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

$$u_a = Ri + U_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \quad \left| \frac{d}{dt}(\ldots) \right.$$

$$\frac{du_a}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i \qquad \text{(DGL)}$$

Die Störfunktion ist $S(t) = \frac{du_a}{dt}$, hängt also von dem konkreten Zeitverlauf der Spannung $u_a$ ab, und ist jedesmal neu zu berechnen!

homogene Lösung:

$$0 = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i$$

$$0 = R\lambda + \frac{1}{C}$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC} \quad \rightarrow \quad i_h = Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

Mit Hilfe der Anfangsspannung $U_0$ lässt sich eine Anfangsbedingung für $i(t)$ auf folgende Weise ableiten:

$$u_a(0) = Ri(0) + U_0 + \frac{1}{C}\int_0^{t=0} i\,dt$$

$$u_a(0) = Ri(0) + U_0$$

$$i(0) = \frac{u_a(0) - U_0}{R}$$

a) $u_a = \hat{u}$

$$S(t) = \frac{du_a}{dt} = 0$$

Es liegt in diesem Fall wieder eine homogene DGL vor!

$$i = Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$K = \frac{u_a(0) - U_0}{R} = \frac{\hat{u} - U_0}{R}$$

$$i = \frac{\hat{u} - U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Für den Fall, dass $U_0 = 0$:

$$i = \frac{\hat{u}}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

b) $u_a = at$

partikuläre Lösung:

$$S(t) = \frac{du_a}{dt} = a$$

$$a = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i$$

$$i_p = A$$

$$\frac{di_p}{dt} = 0$$

$i_p, \frac{di_p}{dt}$ in DGL:

$$a = R \cdot 0 + \frac{1}{C}A$$

$$A = Ca$$

$$i_p = Ca$$

$$i = i_h + i_p$$

$$i = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + Ca$$

$$\text{mit } i(0) = \frac{u_a(0) - U_0}{R}, \quad i(0) = K + Ca$$

$$K + Ca = \frac{0 - U_0}{R}, \quad \text{wegen } u_a(0) = 0$$

$$K = -\left(\frac{U_0}{R} + Ca\right)$$

$$i = -e^{-\frac{1}{RC}t}\left(\frac{U_0}{R} + Ca\right) + Ca$$

$$i = Ca\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) - \frac{U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Für den Fall, dass $U_0 = 0$:

$$i = Ca\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

Nach genügend langer Zeit würde ein konstanter Strom $i = Ca = \text{const.}$ fließen. Praktisch steigt die Spannung am Kondensator dann auch etwa linear mit der Zeit (bis seine Spannungsfestigkeit überschritten ist).

c) $u_a = \hat{u}\sin(\omega t)$

$$\frac{d(\hat{u}\sin(\omega t))}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i$$

$$\hat{u}\omega\cos(\omega t) = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i$$

partikuläre Lösung:

$$i_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\frac{di_p}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$i_p, \frac{di_p}{dt}$ in DGL:

$$\hat{u}\omega\cos(\omega t) = R(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)) + \frac{1}{C}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$

$$\sin(\omega t): \quad (I) \quad 0 = -A\omega R + \frac{B}{C}$$

$$\cos(\omega t): \quad (II) \quad \hat{u}\omega = B\omega R + \frac{A}{C}$$

nach Lösung des LGS:

$$A = \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}, \quad B = \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}$$

$$i_p = \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\cos(\omega t) + \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\sin(\omega t) \quad \Rightarrow i = i_h + i_p$$

$$i = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\cos(\omega t) + \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\sin(\omega t)$$

$$\text{mit } i(0) = \frac{u_a(0) - U_0}{R} \quad \rightarrow \quad K + \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1} = \frac{\hat{u}\sin(\omega \cdot 0) - U_0}{R}$$

$$K = -\left(\frac{U_0}{R} + \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\right)$$

$$i = -e^{-\frac{1}{RC}t}\left(\frac{U_0}{R} + \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\right) + \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\cos(\omega t) + \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\sin(\omega t)$$

Für den Fall, dass $U_0 = 0$:

$$i = -\frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\cos(\omega t) + \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\sin(\omega t)$$

$$i = \frac{\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\left(C\omega\cos(\omega t) + R(C\omega)^2\sin(\omega t) - C\omega e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

d) $u_a = \hat{u}\cos(\omega t)$

$$\frac{d(\hat{u}\cos(\omega t))}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i$$
$$-\hat{u}\omega\sin(\omega t) = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i$$

partikuläre Lösung:

$$i_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$
$$\frac{di_p}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$i_p, \frac{di_p}{dt}$ in DGL:

$$-\hat{u}\omega\sin(\omega t) = R(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)) + \frac{1}{C}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$

$$\sin(\omega t): \quad (\mathrm{I}) \quad -\hat{u}\omega = -A\omega R + \frac{B}{C}$$
$$\cos(\omega t): \quad (\mathrm{II}) \quad 0 = B\omega R + \frac{A}{C}$$

nach Lösung des LGS:

$$A = \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}, \quad B = -\frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}$$
$$i_p = \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\cos(\omega t) - \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\sin(\omega t)$$
$$i = i_h + i_p$$
$$i = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\cos(\omega t) - \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\sin(\omega t)$$

$$\text{mit } i(0) = \frac{u_a(0) - U_0}{R} \quad \rightarrow \quad K + \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1} = \frac{\hat{u}\cos(\omega \cdot 0) - U_0}{R}$$
$$K = \frac{\hat{u} - U_0}{R} - \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}$$
$$i = e^{-\frac{1}{RC}t}\left(\frac{\hat{u} - U_0}{R} - \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\right) + \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\cos(\omega t) - \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\sin(\omega t)$$

Für den Fall, dass $U_0 = 0$:

$$i = e^{-\frac{1}{RC}t}\left(\frac{\hat{u}}{R} - \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\right) + \frac{R(C\omega)^2\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\cos(\omega t) - \frac{C\omega\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1}\sin(\omega t)$$