1. Differentialgleichungen

1.4 Lineare inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 1.4.1 $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 3e^{-2t}$ $\qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

a) Unter welcher Bedingung beschreibt die zugehörige homogene DGL eine ungedämpfte Schwingung wenn a>0 bekannt ist?

Lösung:

Die charakteristische Gleichung mit ihren Lösungen lautet:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Die zugehörige homogene DGL beschreibt eine ungedämpfte Schwingung für den Fall, dass die Lösung ihrer charakteristischen Gleichung rein imaginäre konjugiert komplexe λ enthält. Dies ist der Fall wenn sowohl b=0 ist (es liegt dann keine 1. Ableitung von y vor) als auch c dasselbe Vorzeichen wie a hat, also c>0 ist

$$b = 0 \quad \text{und} \quad c > 0$$

b) Unter welcher Bedingung beschreibt die zugehörige homogene DGL eine gedämpfte Schwingung wenn a>0 bekannt ist?

Auch hier müssen die Lösungen der charakteristischen Gleichung konjugiert komplexe λ – Werte sein, was unter der Wurzel einen negativen Ausdruck erfordert. Außerdem muss der Realteil negativ sein, was wegen a>0 auch b>0 erfordert.

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} < 0 \qquad \text{und} \qquad b > 0$$

c) Lösen Sie die DGL für den Fall a = 2, $b = 16$, $c = 30$ und $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 5$.

Lösung:

$$2\ddot{y} + 16\dot{y} + 30y = 3e^{-2t}, \quad y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 5$$

homogene Lösung:

$$0 = 2\ddot{y} + 16\dot{y} + 30y$$
$$0 = 2\lambda^2 + 16\lambda + 30$$
$$0 = \lambda^2 + 8\lambda + 15$$
$$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -5$$
$$y_h = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-5t}$$

partikuläre Lösung:

$$y_p = ae^{-2t}$$
$$\dot{y}_p = -2ae^{-2t}$$
$$\ddot{y}_p = 4ae^{-2t}$$

$y_p, \dot{y}_p, \ddot{y}_p$ in DGL:

$$3e^{-2t} = 2\left(4ae^{-2t}\right) + 16\left(-2ae^{-2t}\right) + 30\left(ae^{-2t}\right)$$
$$3e^{-2t} = 8ae^{-2t} - 32ae^{-2t} + 30ae^{-2t}$$
$$3e^{-2t} = 6ae^{-2t}$$
$$a = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y_p = \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y = y_h + y_p$$
$$y = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$
$$\dot{y} = -3C_1 e^{-3t} - 5C_2 e^{-5t} - e^{-2t}$$

$$y(0) = 2 \quad \rightarrow \quad \text{(I)} \quad 2 = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2} = C_1 + C_2$$
$$\dot{y}(0) = 5 \quad \rightarrow \quad \text{(II)} \quad 5 = -3C_1 - 5C_2 - 1 \quad \rightarrow \quad 6 = -3C_1 - 5C_2$$

nach Lösung des LGS:

$$C_1 = \frac{27}{4}, \quad C_2 = -\frac{21}{4}$$
$$y = \frac{27}{4}e^{-3t} - \frac{21}{4}e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \quad \text{(spezielle Lösung)}$$

d) Unter welchen Bedingungen würde man bei der inhomogenen DGL $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 3e^{-2t}$ von „mathematischer Resonanz“ sprechen?

Lösung:

Man spricht von „mathematischer Resonanz“, wenn die Störfunktion $S(x)$ selbst eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist.
Eine Teillösung der zugehörigen homogenen DGL muss also eine ebensolche Exponentialfunktion mit dem Koeffizienten $\alpha = -2$ im Exponent sein. Das ist der Fall, wenn die charakteristische Gleichung mindestens eine reelle Lösung $\lambda_1 = -2$ aufweist.

Damit lässt sich die charakteristische Gleichung in der Produktform aufschreiben und in die Summenform bringen und dann mit der zug. hom. DGL vergleichen:

$$(\lambda - (-2))(\lambda - \lambda_2) = 0$$
$$(\lambda + 2)(\lambda - \lambda_2) = 0$$
$$\lambda^2 + (2 - \lambda_2)\lambda + (-2\lambda_2) = 0$$

Vergleich mit charakteristischer Gleichung liefert

$$2 - \lambda_2 = \frac{b}{a}$$
$$-2\lambda_2 = \frac{c}{a}$$

Auflösen nach λ_2 und Gleichsetzen liefert schließlich

$$4a + c = 2b$$

Unter der Bedingung 4a + c = 2b wird sich also stets (mindestens) ein $\lambda = -2$ ergeben, so dass die Störfunktion $S(x) = 3e^{-2t}$ zu mathematischer Resonanz führt.

e) Finden Sie eine allgemeine Lösung für den Fall $a = 1, b = 5$ und $c = 6$.

homogene Lösung:

$$0 = \ddot{y} + 5\dot{y} + 6y$$
$$0 = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$
$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -3$$
$$y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

partikuläre Lösung: Es tritt Resonanz auf; -2 ist eine einfache Nullstelle im λ-Ansatz!

$$y_p = ate^{-2t}$$
$$\dot{y}_p = -2ate^{-2t} + ae^{-2t} = ae^{-2t}(1-2t)$$
$$\ddot{y}_p = 4ate^{-2t} - 4ae^{-2t} = ae^{-2t}(4t-4)$$

$y_p, y_p, \ddot{y}_p$ in DGL:

$$3e^{-2t} = ae^{-2t}(4t-4) + 5\left(ae^{-2t}(1-2t)\right) + 6ate^{-2t}$$
$$3e^{-2t} = ae^{-2t}(4t - 4 + 5 - 10t + 6t)$$
$$3e^{-2t} = ae^{-2t}$$
$$a = 3 \quad \rightarrow \quad y_p = 3te^{-2t}$$

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + 3te^{-2t} \qquad \text{(allgemeine Lösung)}$$

f) Finden Sie die spezielle Lösung für den Fall $a = 1, b = 4, c = 4$ und $y(0) = 2$ und $\dot{y}(0) = 5$.

homogene Lösung:

$$0 = \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y$$
$$0 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$
$$\lambda_{1/2} = -2$$
$$y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

partikuläre Lösung: Es tritt Resonanz auf; -2 ist eine doppelte Nullstelle im λ-Ansatz!

$$y_p = at^2 e^{-2t}$$
$$\dot{y}_p = 2ate^{-2t} - 2at^2 e^{-2t} = ae^{-2t}\left(2t - 2t^2\right)$$
$$\ddot{y}_p = 2ae^{-2t} - 8ate^{-2t} + 4at^2 e^{-2t} = ae^{-2t}\left(2 - 8t + 4t^2\right)$$

$y_p, \dot{y}_p, \ddot{y}_p$ in DGL:

$$3e^{-2t} = ae^{-2t}\left(2 - 8t + 4t^2\right) + 4\left(ae^{-2t}\left(2t - 2t^2\right)\right) + 4at^2 e^{-2t}$$
$$3e^{-2t} = ae^{-2t}\left(2 - 8t + 4t^2 + 8t - 8t^2 + 4t^2\right)$$
$$3e^{-2t} = 2ae^{-2t}$$
$$a = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y_p = \frac{3}{2} t^2 e^{-2t}$$

$$y = e^{-2t}\left(C_1 + C_2 t + \frac{3}{2} t^2\right) \qquad \text{(allgemeine Lösung)}$$

$$\dot{y} = e^{-2t}\left(-2C_1 + C_2 - 2C_2 t + 3t - 3t^2\right)$$
$$y(0) = 2 \quad \rightarrow \quad (\mathrm{I}) \quad C_1 = 2$$
$$\dot{y}(0) = 5 \quad \rightarrow \quad (\mathrm{II}) \quad 5 = -2C_1 + C_2, \quad C_2 = 9$$

$$y = e^{-2t}\left(2 + 9t + \frac{3}{2} t^2\right) \qquad \text{(spezielle Lösung)}$$

Aufgabe 1.4.2 $y'' + 4y = 5\sin(3x)$

homogene Lösung:

$$0 = y'' + 4y$$
$$0 = \lambda^2 + 4$$
$$\lambda_{1/2} = 0 \pm 2j$$
$$y_h = e^{0x}\left[A\cos(2x) + B\sin(2x)\right] = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

partikuläre Lösung:

$$S(x) = 5\sin(3x)$$
$$y_p = a\cos(3x) + b\sin(3x)$$
$$y_p' = -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x)$$
$$y_p'' = -9a\cos(3x) - 9b\sin(3x)$$

y_p, y_p'' in DGL:

$$5\sin(3x) = -9a\cos(3x) - 9b\sin(3x) + 4\big(a\cos(3x) + b\sin(3x)\big)$$
$$5\sin(3x) = \cos(3x)\left[-9a + 4a\right] + \sin(3x)\left[-9b + 4b\right]$$
$$5\sin(3x) = -5a\cos(3x) - 5b\sin(3x)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\sin(3x): \quad 5 = -5b \quad \rightarrow \quad b = -1$$
$$\cos(3x): \quad 0 = -5a \quad \rightarrow \quad a = 0$$
$$y_p = -\sin(3x)$$
$$y = A\cos(2x) + B\sin(2x) - \sin(3x) \qquad \text{(allgemeine Lösung)}$$
$$y' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) - 3\cos(3x)$$

a) Anfangswerte: $y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$

$$y(0) = 2 \quad \rightarrow \quad (\mathrm{I}) \quad A = 2$$
$$y'(0) = -3 \quad \rightarrow \quad (\mathrm{II}) \quad -3 = 2B - 3 \quad \rightarrow \quad B = 0$$
$$y = 2\cos(2x) - \sin(3x) \qquad \text{(spezielle Lösung)}$$

b) Anfangswerte: $y(0) = y'(0) = 0$

$$y(0) = 0 \quad \rightarrow \quad (\mathrm{I}) \quad A = 0$$
$$y'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad (\mathrm{II}) \quad 0 = 2B - 3 \quad \rightarrow \quad B = \frac{3}{2}$$
$$y = \frac{3}{2}\sin(2x) - \sin(3x) \qquad \text{(spezielle Lösung)}$$

Aufgabe 1.4.3 $\qquad y'' - 4y = 5\cos(3x)$

homogene Lösung:

$$\begin{aligned} 0 &= y'' - 4y \\ 0 &= \lambda^2 - 4 \\ \lambda_{1/2} &= \pm 2 \\ y_h &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} S(x) &= 5\cos(3x) \\ y_p &= a\cos(3x) + b\sin(3x) \\ y_p' &= -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x) \\ y_p'' &= -9a\cos(3x) - 9b\sin(3x) \end{aligned}$$

y_p, y_p'' in DGL:

$$\begin{aligned} 5\cos(3x) &= -9a\cos(3x) - 9b\sin(3x) - 4\left(a\cos(3x) + b\sin(3x)\right) \\ 5\cos(3x) &= \cos(3x)\left[-9a - 4a\right] + \sin(3x)\left[-9b - 4b\right] \\ 5\cos(3x) &= -13a\cos(3x) - 13b\sin(3x) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\sin(3x): \quad 0 = -13b \quad \rightarrow \quad b = 0$$

$$\cos(3x): \quad 5 = -13a \quad \rightarrow \quad a = -\frac{5}{13}$$

$$y_p = -\frac{5}{13}\cos(3x)$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{5}{13}\cos(3x) \qquad \text{(allgemeine Lösung)}$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} + \frac{15}{13}\sin(3x)$$

a) Anfangswerte: $y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$

$$y(0) = 2 \quad \rightarrow \quad (\mathrm{I}) \quad 2 = C_1 + C_2 - \frac{5}{13}$$

$$y'(0) = -3 \quad \rightarrow \quad (\mathrm{II}) \quad -3 = 2C_1 - 2C_2$$

Lösung des LGS:

$$C_1 = \frac{23}{52}, \quad C_2 = \frac{101}{52}$$

$$y = \frac{23}{52}e^{2x} + \frac{101}{52}e^{-2x} - \frac{5}{13}\cos(3x) \qquad \text{(spezielle Lösung)}$$

b) Anfangswerte: $y(0) = y'(0) = 0$

$$y(0) = 0 \quad \rightarrow \quad (\mathrm{I}) \quad 0 = C_1 + C_2 - \frac{5}{13}$$

$$y'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad (\mathrm{II}) \quad 0 = 2C_1 - 2C_2$$

Lösung des LGS:

$$C_1 = C_2 = \frac{5}{26}$$

$$y = \frac{5}{26}e^{2x} + \frac{5}{26}e^{-2x} - \frac{5}{13}\cos(3x) \qquad \text{(spezielle Lösung)}$$

Aufgabe 1.4.4 $\quad \ddot{x} + 10\dot{x} + 21x = 3t^2 + 4e^{-2t} \quad$ mit $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

homogene Lösung:

$$0 = \ddot{x} + 10\dot{x} + 21x$$

$$0 = \lambda^2 + 10\lambda + 21$$

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -7$$

$$x_h = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-7t}$$

partikuläre Lösung:

$$S(t) = 3t^2 + 4e^{-2t}$$

$$x_p = at^2 + bt + c + de^{-2t}$$

$$\dot{x}_p = 2at + b - 2de^{-2t}$$

$$\ddot{x}_p = 2a + 4de^{-2t}$$

$x_p, \dot{x}_p, \ddot{x}_p$ in DGL:

$$3t^2 + 4e^{-2t} = 2a + 4de^{-2t} + 10\left(2at + b - 2de^{-2t}\right) + 21\left(at^2 + bt + c + de^{-2t}\right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$t^2: \quad 3 = 21a \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{7}$$

$$t: \quad 0 = 20a + 21b \quad \rightarrow \quad b = -\frac{20}{147}$$

$$t^0: \quad 0 = 2a + 10b + 21c \quad \rightarrow \quad c = -\frac{158}{3087}$$

$$e^{-2t}: \quad 4 = 5d \quad \rightarrow \quad d = \frac{4}{5}$$

$$x_p = \frac{1}{7}t^2 - \frac{20}{147}t - \frac{158}{3087} + \frac{4}{5}e^{-2t}$$

$$x = x_h + x_p$$

allgemeine Lösung:

$$x = C_1e^{-3t} + C_2e^{-7t} + \frac{1}{7}t^2 - \frac{20}{147}t - \frac{158}{3087} + \frac{4}{5}e^{-2t}$$

$$\dot{x} = -3C_1e^{-3t} - 7C_2e^{-7t} + \frac{2}{7}t - \frac{20}{147} - \frac{8}{5}e^{-2t}$$

Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad \rightarrow \quad (I) \quad 0 = C_1 + C_2 + \frac{4}{5} + \frac{158}{3087}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad (II) \quad 0 = -3C_1 - 7C_2 - \frac{8}{5} - \frac{20}{147}$$

Lösung des LGS:

$$C_1 = -\frac{19}{18}, \quad C_2 = \frac{701}{3430}$$

spezielle Lösung:

$$x = -\frac{19}{18}e^{-3t} + \frac{701}{3430}e^{-7t} + \frac{1}{7}t^2 - \frac{20}{147}t - \frac{158}{3087} + \frac{4}{5}e^{-2t}$$