## 1. Differentialgleichungen

1.3 Lösen Sie die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mittels der charakteristischen Gleichung.

**Aufgabe 1.3.1** $\ddot{y} + 8\dot{y} + 15y = 0$

Lösung

charakt. Gleichung:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16 - 15}$$

$$\lambda_{1/2} = -4 \pm 1$$

$$\lambda_1 = -3; \quad \lambda_2 = -5$$

allgemeine Lösung:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-5x}$$

**Aufgabe 1.3.2** $y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1; \quad y(0) = 2$

Lösung

charakt. Gleichung:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$$

$$\lambda_{1/2} = 2; \quad \text{doppelte Nullstelle}$$

allgemeine Lösung:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

spezielle Lösung:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x}(1 + 2x)$$

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = C_1 + 0 \cdot C_2; \quad C_1 = 1$$

$$y'(0) = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = 2 \cdot 1 + C_2; \quad C_2 = 0$$

$$y = e^{2x} \qquad \text{(spezielle Lösung)}$$

**Aufgabe 1.3.3** $y''' + 4y'' + 4y' = 0$

Lösung

charakt. Gleichung:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$$\lambda\left(\lambda^2 + 4\lambda + 4\right) = 0; \qquad \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4-4}$$

$$\lambda_{2/3} = -2; \quad \text{doppelte Nullstelle}$$

allgemeine Lösung:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x}$$

**Aufgabe 1.3.4** $\dfrac{d^2u}{dt^2} + 8\dfrac{du}{dt} + 25u = 0 \quad \text{mit} \quad u(0) = A; \dot{u}(0) = 0$

Lösung

charakt. Gleichung:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16-25}$$

$$\lambda_{1/2} = -4 \pm \sqrt{-9}$$

$$\lambda_{1/2} = -4 \pm 3j; \quad \text{konjugiert komplexe Nullstellen}$$

$$\Rightarrow \quad u = e^{-4t}\left[C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)\right] \qquad \text{(allgemeine Lösung)}$$

$$u = e^{-4t}\left[C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)\right]$$

$$\dot{u} = -4e^{-4t}\left[C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)\right] + e^{-4t}\left[-3C_1\sin(3t) + 3C_2\cos(3t)\right]$$

$$\dot{u} = e^{-4t}\left[\left(-4C_1 + 3C_2\right)\cos(3t) + \left(-3C_1 - 4C_2\right)\sin(3t)\right]$$

$$u(0) = A \quad \rightarrow \quad A = e^0\left[C_1\cos(0) + C_2\sin(0)\right] \quad \rightarrow \quad C_1 = A$$

$$\dot{u}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = e^0\left[\left(-4A + 3C_2\right)\cos(0) + \left(-3A - 4C_2\right)\sin(0)\right] \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{4}{3}A$$

$$\Rightarrow \quad u = Ae^{-4t}\left[\cos(3t) + \frac{4}{3}\sin(3t)\right] \qquad \text{(spezielle Lösung)}$$

**Aufgabe 1.3.5** $\frac{d^3y}{dx^3} - 8\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 50y = 0$

Lösung

charakt. Gleichung:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 5\lambda + 50 = 0$$

Horner – Schema :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −8 | 5 | 50 |
| $\lambda = -2$ | | −2 | 20 | −50 |
| | 1 | −10 | 25 | 0 |

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda_{2/3} = 5; \quad \text{doppelte Nullstelle}$$

allgemeine Lösung:

$$y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x} + C_3e^{-2x}$$

**Aufgabe 1.3.6** $\frac{d^4r}{dx^4} + 5\frac{d^3r}{dx^3} + 17\frac{d^2r}{dx^2} + 13\frac{dr}{dx} = 0$

Lösung

charakt. Gleichung:

$$\lambda^4 + 5\lambda^3 + 17\lambda^2 + 13\lambda = 0$$

$$\lambda\left(\lambda^3 + 5\lambda^2 + 17\lambda + 13\right) = 0; \qquad \lambda_1 = 0$$

Horner – Schema :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 5 | 17 | 13 |
| $\lambda_2 = -1$ | | −1 | −4 | −13 |
| | 1 | 4 | 13 | 0 |

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{3/4} = -2 \pm 3j; \quad \text{konjugiert komplexe Nullstellen}$$

allgemeine Lösung:

$$r = C_1 + C_2e^{-x} + e^{-2x}\left[C_3\cos(3x) + C_4\sin(3x)\right]$$

**Aufgabe 1.3.7** $\frac{d^3i}{dt^3}-5\frac{d^2i}{dt^2}+11\frac{di}{dt}-15i=0$ mit $i(0)=A;\ \left.\frac{d^2i}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=0$

Lösung

charakt. Gleichung: $\lambda^3-5\lambda^2+11\lambda-15=0$

Horner – Schema:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | –5 | 11 | –15 |
| $\lambda_1=3$ | | 3 | –6 | 15 |
| | 1 | –2 | 5 | 0 |

$\lambda^2-2\lambda+5=0$

$\lambda_{2/3}=1\pm 2j$; konjugiert komplexe Nullstellen

$$i=C_1e^{3t}+e^t\left[C_2\cos(2t)+C_3\sin(2t)\right]\qquad \text{(allg. Lösung)}$$

$$i=C_1e^{3t}+e^t\left[C_2\cos(2t)+C_3\sin(2t)\right]$$

$$\frac{di}{dt}=3C_1e^{3t}+e^t\left[C_2\cos(2t)+C_3\sin(2t)\right]+e^t\left[-2C_2\sin(2t)+2C_3\cos(2t)\right]$$

$$\frac{di}{dt}=3C_1e^{3t}+e^t\left[\{C_2+2C_3\}\cos(2t)+\{-2C_2+C_3\}\sin(2t)\right]$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}=9C_1e^{3t}+e^t\left[\{C_2+2C_3\}\cos(2t)+\{-2C_2+C_3\}\sin(2t)\right]$$
$$+e^t\left[-2\{C_2+2C_3\}\sin(2t)+2\{-2C_2+C_3\}\cos(2t)\right]$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}=9C_1e^{3t}+e^t\left[\{-3C_2+4C_3\}\cos(2t)+\{-4C_2-3C_3\}\sin(2t)\right]$$

$$i(0)=A\quad\to\quad A=C_1e^0+e^0\left[C_2\cos(0)+C_3\sin(0)\right]\quad\to\quad (I)\ A=C_1+C_2$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=0\quad\to\quad 0=3C_1e^0+e^0\left[\{C_2+2C_3\}\cos(0)+\{-2C_2+C_3\}\sin(0)\right]$$

$$\to\quad (II)\ 0=3C_1+C_2+2C_3$$

$$\left.\frac{d^2i}{dt^2}\right|_{t=0}=0\quad\to\quad 0=9C_1e^0+e^0\left[\{-3C_2+4C_3\}\cos(0)+\{-4C_2-3C_3\}\sin(0)\right]$$

$$\to\quad (III)\ 0=9C_1-3C_2+4C_3$$

Gleichungssystem: Ergebnis $C_1=\frac{5A}{8};\quad C_2=\frac{3A}{8};\quad C_3=\frac{-9A}{8}$

$$i=\frac{5A}{8}e^{3t}+Ae^t\left[\frac{3}{8}\cos(2t)+\frac{-9}{8}\sin(2t)\right]\qquad \text{(spez. Lösung:)}$$

**Aufgabe 1.3.8**

$$\frac{d^4u}{dt^4}+8\frac{d^3u}{dt^3}+26\frac{d^2u}{dt^2}+48\frac{du}{dt}+45u=0 \quad \text{mit} \quad u(0)=20;\ \dot{u}(0)=15;\ \ddot{u}(0)=\dddot{u}(0)=0$$

Lösung

$$0=\lambda^4+8\lambda^3+26\lambda^2+48\lambda+45 \qquad \text{(charakt. Gleichung)}$$
$$\lambda_1=\lambda_2=-3\ \text{(doppelte Nullst.)} \qquad \lambda_{3/4}=-1\pm 2j\ \text{(konj. kompl. Nullst.)}$$

$$u=C_1\cdot e^{-3t}+C_2te^{-3t}+e^{-t}\left[C_3\cos(2t)+C_4\sin(2t)\right] \qquad \text{(allg. Lsg.)}$$

$$u=C_1e^{-3t}+C_2te^{-3t}+e^{-t}\left[C_3\cos(2t)+C_4\sin(2t)\right]$$
$$\dot{u}=-3C_1e^{-3t}+C_2e^{-3t}(1-3t)+e^{-t}\left[\{2C_4-C_3\}\cos(2t)+\{-2C_3-C_4\}\sin(2t)\right]$$
$$\ddot{u}=9C_1e^{-3t}+C_2e^{-3t}(9t-6)+e^{-t}\left[\{-3C_3-4C_4\}\cos(2t)+\{4C_3-3C_4\}\sin(2t)\right]$$
$$\dddot{u}=-27C_1e^{-3t}+C_2e^{-3t}(27-27t)+e^{-t}\left[\{11C_3-2C_4\}\cos(2t)+\{2C_3-11C_4\}\sin(2t)\right]$$

$$u(0)=C_1e^0+C_2\cdot 0\cdot e^0+e^0\left[C_3\cos(0)+C_4\sin(0)\right]=20$$
$$\dot{u}(0)=-3C_1e^0+C_2e^0(1-3\cdot 0)+e^0\left[\{2C_4-C_3\}\cos(0)+\{-2C_3-C_4\}\sin(0)\right]=15$$
$$\ddot{u}(0)=9C_1e^0+C_2e^0(9\cdot 0-6)+e^0\left[\{-3C_3-4C_4\}\cos(0)+\{4C_3-3C_4\}\sin(0)\right]=0$$
$$\dddot{u}(0)=-27C_1e^0+C_2e^0(27-27\cdot 0)+e^0\left[\{11C_3-2C_4\}\cos(0)+\{2C_3-11C_4\}\sin(0)\right]=0$$

$$C_1+C_3=20\,(I)$$
$$-3C_1+C_2-C_3+2C_4=15\,(II)$$
$$9C_1-6C_2-3C_3-4C_4=0\,(III)$$
$$-27C_1+27C_2+11C_3-2C_4=0\,(IV)$$

$$C_1=\frac{725}{16};\quad C_2=\frac{465}{8};\quad C_3=-\frac{405}{16};\quad C_4=\frac{135}{4}$$

$$u=\frac{725}{16}e^{-3t}+\frac{465}{8}te^{-3t}+e^{-t}\left[-\frac{405}{16}\cos(2t)+\frac{135}{4}\sin(2t)\right] \qquad \text{(spezielle Lösung)}$$