3. Thema: Vollständiges Differential, Fehlerrechnung

3.1 Von einem Trapez wurden die parallelen Seiten zu a = 24,25cm und b = 45,75cm gemessen. Die Höhe beträgt h = 18,50cm. Alle Längenmessungen haben einen Maximalfehler von 0,10cm. Berechnen Sie den Wert des Flächeninhaltes und den zugehörigen Maximalfehler und geben Sie beides in vernünftiger Genauigkeit an.

Lösung:

Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}(24{,}25\,\text{cm} + 45{,}75\,\text{cm}) \cdot 18{,}50\,\text{cm} = \underline{\underline{647{,}5\,\text{cm}^2}}$$

Maximalfehler:

$$\Delta A = \left|\frac{\partial A}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial A}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial A}{\partial h}\right|\Delta h$$

$$\Delta A = \left|\frac{1}{2}h\right|\Delta a + \left|\frac{1}{2}h\right|\Delta b + \left|\frac{1}{2}(a+b)\right|\Delta h$$

$$\Delta A = \left|\frac{1}{2}\cdot 18{,}50\,\text{cm}\right| \cdot 0{,}10\,\text{cm} + \left|\frac{1}{2}\cdot 18{,}50\,\text{cm}\right| \cdot 0{,}10\,\text{cm} + \left|\frac{1}{2}\cdot (24{,}25\text{cm} + 45{,}75\text{cm})\right| \cdot 0{,}10\,\text{cm}$$

$$\Delta A = 0{,}925\,\text{cm}^2 + 0{,}925\,\text{cm}^2 + 3{,}5\,\text{cm}^2 = 5{,}35\,\text{cm}^2$$

$$\Delta A \approx \underline{\underline{5{,}4\,\text{cm}^2}}$$

$$\underline{\underline{A = (647{,}5 \pm 5{,}4)\,\text{cm}^2}}$$

3.2 Von einem Keramikrohr sind folgende Angaben bekannt:

Innendurchmesser	d = 70,0 mm	abs. Maximalfehler: 1,0 mm
Außendurchmesser	D = 100,0 mm	abs. Maximalfehler: 1,5 mm
Länge	L = 1000,0 mm	abs. Maximalfehler: 2,0 mm
Dichte	ρ = 3,95 g/cm3	rel. Maximalfehler: 0,75 %

Berechnen Sie von dem Keramikrohr die Masse mit dem zugehörigen absoluten Maximalfehler.

Lösung

$$m = \rho \cdot V \quad \text{mit } V = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) \cdot L$$

$$m = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)\rho \cdot L$$

$$m = 3{,}95 \cdot 100 \cdot \frac{\pi}{4}(100 - 49)g = \underline{\underline{15{,}8218kg}}$$

$$\Delta m = \left|\frac{\partial m}{\partial D}\right| \cdot \Delta D + \left|\frac{\partial m}{\partial d}\right| \cdot \Delta d + \left|\frac{\partial m}{\partial L}\right| \cdot \Delta L + \left|\frac{\partial m}{\partial \rho}\right| \cdot \Delta \rho$$

$$\left|\frac{\partial m}{\partial D}\right| \cdot \Delta D = \frac{\pi}{2} D \rho L \, \Delta D = \frac{\pi}{2} 10 \cdot 3{,}95 \cdot 100 \cdot 0{,}15g \quad = \underline{\underline{930{,}7g}}$$

$$\left|\frac{\partial m}{\partial d}\right| \cdot \Delta d = \frac{\pi}{2} d L \rho \, \Delta d = \frac{\pi}{2} 7 \cdot 3{,}95 \cdot 100 \cdot 0{,}1 \quad = \underline{\underline{434{,}3g}}$$

$$\left|\frac{\partial m}{\partial L}\right| \cdot \Delta L = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)\rho \, \Delta L = \frac{15821{,}8}{100} \cdot 0{,}2 \quad = \underline{\underline{31{,}6g}}$$

$$\left|\frac{\partial m}{\partial \rho}\right| \cdot \Delta \rho = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)L \, \Delta \rho = \frac{15822}{3{,}95} \cdot \frac{0{,}75}{100} \cdot 3{,}95 = \underline{\underline{118{,}7g}}$$

$$\Delta m = \left(930{,}7 + 434{,}3 + 31{,}6 + 118{,}7\right)g$$

$$\Delta m = 1515{,}3g \approx 1{,}5kg$$

$$\underline{\underline{m = \left(15{,}8 \pm 1{,}5\right)kg}}$$

3.3 Gegeben ist die Funktion $z = f(x,y) = (x + 1) \ln(y-2)$

a) Berechnen Sie den Funktionswert z an dem Punkt P(4 ;5).

b) Geben Sie das vollständige Differential der Funktion an.

c) Wie groß ist die Unsicherheit für den berechneten Wert z am Punkt P, wenn dort x und y mit einem relativen Maximalfehler von 1% bekannt sind ? Berechnen Sie dazu den absoluten und relativen Maximalfehler von z .

Lösung:

$f(4;5) = 5\ln 3 = 5{,}493$

$$dz = \ln(y-2)dx + \frac{x+1}{y-2}dy$$

$$\Delta z \approx \left|\ln(y-2)\right|\Delta x + \left|\frac{x+1}{y-2}\right|\Delta y$$

$$\Delta z = 0{,}127 \approx 0{,}13 \qquad z = (5{,}49 \pm 0{,}13)$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{0{,}127}{5{,}493} = 0{,}0231 \approx 0{,}023 \approx 2{,}3\%$$